ЛЕКЦИЯ 4. ГОМОЛОГИИ ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЙ.

Вначале — два следствия из теоремы о совпадении клеточных и сингулярных гомологий. В них участвуют гомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$, и используется такое утверждение:

Лемма 1. *Всякий конечных комплекс конечномерных линейных пространств над произвольным полем $\mathbb{F}$ разлагается в прямую сумму одночленных комплексов $0 \to U \to 0$ и двучленных комплексов $0 \to V \to W \to 0$, где средняя стрелка — изоморфизм.*

Доказательство. Комплекс $0 \to A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \to \dots \to A_0 \to 0$ является прямой суммой одночленного комплекса $0 \to \operatorname{Ker} \partial_n \to 0$, двучленного комплекса $0 \to (\operatorname{Ker} \partial_n)^\perp \to \operatorname{Im} \partial_n \to 0$, в котором $(\operatorname{Ker} \partial_n)^\perp \subset A_n$ — произвольное прямое дополнение подпространства $\operatorname{Ker} \partial_n \subset A_n$, а средняя стрелка — ограничение ∂_n на это подпространство — является изоморфизмом, и комплекса $0 \to A_{n-1} \to \dots \to A_0 \to 0$. Далее по индукции. □

Следствие 1. *Пусть $0 \to A_n \to \dots \to A_0 \to 0$ — комплекс конечномерных линейных пространств над произвольным полем $\mathbb{F}$. Тогда $\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim A_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H_i(A, \mathbb{F})$.*

Доказательство. Если утверждение выполнено для каких-либо двух комплексов, то оно выполнено и для их прямой суммы. Поэтому достаточно проверить его только для "элементарных" одночленных и двучленных комплексов, упомянутых в лемме 1, — а для таких комплексов проверка тривиальна. □

Назовем тензорным произведением комплексов A и B комплекс C, для которого, по определению, $C_i = \bigoplus_{p+q=i} A_p \otimes B_q$, и $\partial_i^C = \bigoplus_{p+q=i} \partial_q^A \otimes \mathrm{id} \oplus (-1)^p \,\mathrm{id} \otimes \partial_q^B$.

Следствие 2. *Пусть A и B — комплексы конечномерных линейных пространств над произвольным полем $\mathbb{F}$. Тогда $H_i(A \otimes B, \mathbb{F}) = \bigoplus_{p+q=i} H_p(A, \mathbb{F}) \otimes H_q(B, \mathbb{F})$.*

Доказательство. Опять-таки, утверждение "линейно" по отношению к прямой сумме комплексов. Для элементарных слагаемых леммы 1 оно проверяется напрямую. □

Теорема 1. *Пусть X — компактное n-мерное клеточное пространство, в котором число i-мерных симплексов равно f_i. Тогда $\sum_{i=0}^n (-1)^i f_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H_i(X, \mathbb{R})$ и, тем самым, сумма в левой части одинакова для всех клеточных разбиений.*

Сумма в правой части называется эйлеровой характеристикой топологического пространства X и обозначается $\chi(X)$.

Доказательство. По определению, $f_i = \dim \mathcal{K}_i(X, \mathbb{R})$, так что теорема вытекает из следствия 1. □

Теорема 2 (формула Кюннета). *Пусть X и Y — два клеточных пространства. Тогда $H_i(X \times Y, \mathbb{R}) = \bigoplus_{p+q=i} H_p(X, \mathbb{R}) \otimes H_q(Y, \mathbb{R})$.*

Разумеется, формула Кюннета верна также и для пространств, гомотопически эквивалентных клеточным.

Доказательство. [формулы Кюннета] Нетрудно видеть, что клеточный комплекс пространства $X \times Y$ является тензорным произведением клеточных комплексов пространств X и Y. Поэтому формула вытекает из следствия 2. $\square$

Пусть $\alpha_q : T_q \to D^q$ — гомеоморфизм. *Триангуляцией* топологического пространства X называется его клеточное разбиение с таким свойством. Пусть σ, τ — клетки размерностей q и $r < q$ соответственно, и f_σ, f_τ — их характеристические отображения. Тогда существует r-мерная грань Γ симплекса T_q и аффинное отображение $\Lambda : T_r \to \Gamma$ такое, что отображение $f_\sigma|_{\partial D^q} \circ \alpha_r \circ \Lambda \circ \alpha_r^{-1}$ гомотопно либо f_τ, либо $-f_\tau$ — композиции f_τ с симметрией диска D^r. В первом случае говорят, что клетки σ и τ ориентированы согласованно, во втором — несогласованно.

Нетрудно видеть, что все характеристические отображения $f : D^n \to X$ триангуляции являются гомоморфизмами $D^n \to f(D^n) \subset X$. Пусть теперь триангуляция X конечномерна, $\Delta \subset X$ — какой-нибудь симплекс максимальной размерности n, и $a \in \operatorname{Int}\Delta$. Тогда $\operatorname{Int}\Delta$ — окрестность точки a, гомеоморфная D^n, а проколотая окрестность $\operatorname{Int}\Delta \setminus \{a\}$ гомотопически эквивалентна S^{n-1}. В группе $\pi_{n-1}(\operatorname{Int}\Delta \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$ выделена каноническая образующая, полученная ограничением характеристического отображения $f_\Delta : T_n \to X$ на границу симплекса T_n. В случае если X — ориентированное n-мерное многообразие, эта образующая может совпадать с образующей, заданной ориентацией, или не совпадать. Если она совпадает для всех n-мерных симплексов триангуляции, то говорят, что триангуляция согласована с ориентацией многообразия.

Следующая теорема (которую мы не будем доказывать) является основой гомологической теории многообразий.

Теорема (о триангулируемости многообразия). *Пусть X — гладкое компактное n-мерное многообразие без края. Тогда X допускает конечную триангуляцию, причем каждая клетка (симплекс) τ размерности $n-1$ принадлежит границе ровно двух n-мерных клеток, σ_1 и σ_2. Если многообразие X ориентировано, то триангуляция может быть согласована с ориентацией. В этом случае симплекс τ ориентирован согласованно ровно с одним из двух симплексов σ_1. σ_2.*

Компактные многообразия без края называют замкнутыми.

Теорема 3. *Пусть X — связное замкнутое n-мерное многообразие. Тогда $H_n(X, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, причем образующей группы является сумма n-мерных симплексов произвольной триангуляции многообразия X. Если X ориентируемо, то $H_n(X) = \mathbb{Z}$, и в качестве образующей можно взять сумму n-мерных симплексов произвольной триангуляции, согласованной с ориентацией.*

Доказательство. Докажем утверждение про ориентируемый случай; случай с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ аналогичен. Выберем на многообразии X ориентированную триангуляцию, и пусть $\sigma = \sum_i k_i \sigma_i \in \mathcal{Z}_n(\mathcal{K}(X))$. Пусть τ — клетка размерности $n-1$, лежащая на границе клеток σ_i и σ_j. Тогда τ входит в $\partial\sigma$ с коэффициентом $\pm(k_i - k_j) = 0$, откуда $k_i = k_j$. Поскольку X связно, любые два n-мерных симплекса триангуляции можно соединить цепочкой из симплексов;

отсюда следует, что все коэффициенты k_i равны друг другу. Тем самым $\mathbb{Z} = \mathcal{Z}_n(\mathcal{K}(X)) = H_n(\mathcal{K}(X))$ (поскольку $(n+1)$-мерных цепей не существует) $= H_n(X)$.

В случае неориентированной триангуляции коэффициент при τ будет равен $\pm k_i \pm k_j = 0$, откуда следует, что $k_i \equiv k_j \bmod 2$. Это доказывает результат про гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. □

Пусть $Y \subset X$ — ориентированное замкнутое подмногообразие размерности $m \leq n$, и $\iota : Y \to X$ — вложение. Тогда класс гомологий $\iota_*(1) \in H_m(X)$, где $1 \in H_m(Y) = \mathbb{Z}$ — стандартная образующая, называется классом, реализуемым подмногообразием Y. В случае коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ ориентируемость не требуется.

Пусть $f : X \to Y$ — гладкое отображение связных замкнутых ориентированных n-мерных многообразий. Гомоморфизм $f : \mathbb{Z} = H_n(X) \to H_n(Y) = \mathbb{Z}$ представляет собой умножение на число d, называемое степенью отображения f. Очевидно, гомотопные отображения имеют одинаковую степень.

Точка $a \in X$ называется некритической для отображения f, если производная $f'(x) : T_aX \to T_{f(a)}Y$ — невырожденное линейное отображение. Поскольку многообразия X и Y ориентированы, линейные пространства T_aX и $T_{f(a)}Y$ также ориентированы, и отображение $f'(x)$ может либо сохранять ориентацию, либо менять ее. В первом случае точке a приписывается знак $\sigma(a) = +1$, во втором $\sigma(a) = -1$.

Точка $b \in Y$ называется некритическим значением отображения f, если все точки прообраза $f^{-1}(b) \subset X$ — некритические. Из компактности и теоремы о неявной функции следует тогда, что количество точек прообраза конечно.

Лемма (Сарда). *Всякое гладкое отображение замкнутых многообразий одной и той же размерности имеет по крайней мере одно некритическое значение.*

На самом деле верно, что множество критических значений мало — имеет лебегову меру нуль, и именно поэтому не может совпадать со всем многообразием Y. Мы не будем доказывать лемму Сарда.

Теорема 4. *Пусть $f : X \to Y$ — гладкое отображение степени d замкнутых ориентированных n-мерных многообразий, и пусть $b \in Y$ — некритическое значение. Тогда $\sum_{a \in f^{-1}(b)} \sigma(a) = d$. Это же равенство верно в $\mathbb{Z}_2$ без предположения ориентированности.*

Доказательство теоремы см. в следующей лекции.