ЛЕКЦИЯ 5. СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ.

Доказательство. [формулы для степени отображения] Пусть $U \subset Y$ — малая окрестность точки b, гомеоморфная n-мерному шару. Из теоремы о неявной функции следует, что прообраз $f^{-1}(U)$ имеет вид $\bigsqcup_{a\in f^{-1}(b)} V_a$, где каждая V_a — малая окрестность точки $a \in f^{-1}(b)$, также гомеоморфная шару. Из формулы Тейлора вытекает, что отображение $f|_{V_a} : V_a \to U$ — гомеоморфизм, гомотопный линейному отображению $f'(a)$ (здесь речь идет о малых окрестностях точек многообразий, поэтому мы всегда можем считать их вложенными в $\mathbb{R}^n$). Отсюда следует, что ограничение $f|_{\partial V_a} : \partial V_a \to \partial U$ — отображение $S^{n-1} \to S^{n-1}$ степени $\sigma(a) = \pm 1$.

Поскольку Y — гладкое многообразие, $(Y \setminus U)/\partial U \approx Y$. Поэтому $H_n(Y) = H_n((Y \setminus U)/\partial U) = H_n(Y \setminus U, \partial U)$ — последнее равенство доказывается стандартным способом с применением леммы 2 лекции 2. Аналогично, $H_n(X) = H_n(X \setminus \bigcup_a V_a, \bigcup_a \partial V_a)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X) & = & H_n(X \setminus \bigcup_a V_a, \bigcup_a \partial V_a) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(\bigcup_a \partial V_a) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_n(Y) & = & H_n(Y \setminus U, \partial U) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(\partial U) \end{array},$$

где ∂_* обозначает связывающие гомоморфизмы в точных последовательностях пар $(X \setminus \bigcup_a V_a, \bigcup_a \partial V_a)$ и $(Y \setminus U, \partial U)$ соответственно. В верхней строке $d_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^N$ (где N — число точек прообраза $f^{-1}(b)$) переводит 1 в $(1, 1, \ldots, 1)$, а в нижней строке $\partial_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ — тождественное отображение. Левая стрелка f_* представляет собой умножение на d, а правая переводит образующую $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 на i-м месте) в $\sigma(a_i)$. Из коммутативности теперь следует, что $d = f_*(1, 1, \ldots, 1) = \sum_a \sigma(a)$. □

Пусть опять X — замкнутое многообразие без края с фиксированной триангуляцией; если X ориентировано, то подразумевается, что триангуляция согласована с ориентацией. Произведем барицентрическое подразделение всех симплексов (всех размерностей) этой триангуляции. Для каждого q-мерного симплекса σ исходной триангуляции обозначим $\tilde{\sigma}$ объединение всех $(n-q)$-мерных симплексов барицентрического подразделения, пересекающих симплекс σ в точности в его центре. Нетрудно видеть, что если σ лежит на границе τ, то $\tilde{\tau}$ лежит на границе $\tilde{\sigma}$; удалив все такие $\tilde{\tau}$ из $\tilde{\sigma}$, получим множество, называемое (открытой) барицентрической звездой симплекса σ и обозначаемое σ^*. Нетрудно видеть, что открытые барицентрические звезды гомеоморфны шарам и образуют клеточное разбиение многообразия X.

Определим билинейное спаривание между q-мерным цепями исходного клеточного разбиения (триангуляции) и $(n-q)$-мерными цепями нового ("звездного") клеточного разбиения, полагая $\langle \sigma, \tau^* \rangle = 1$ при $\tau = \sigma$ и 0 при $\tau \neq \sigma$.

Лемма 1. $\langle \partial\sigma, \tau^* \rangle = (-1)^q \langle \sigma, \partial\tau^* \rangle$.

Доказательство. Достаточно проверить равенство в случае, когда σ и τ — симплексы триангуляции. Если τ лежит на границе σ, то обе части равны ± 1, если не лежит — равны 0. □

Теорема 1. *Для n-мерного компактного ориентированного многообразия без края X имеет место равенство $H_q(X, \mathbb{R}) = H_{n-q}(X, \mathbb{R})$. Для гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ равенство имеет место без предположения ориентированности.*

Доказательство. Обозначим $(\mathcal{K}^T(X), \partial^T)$ клеточный комплекс триангуляции, а $(\mathcal{K}^S(X), \partial^S)$ — "звездный" клеточный комплекс. Тогда из леммы 1 следует, что $\operatorname{Ker} \partial^S_{n-q} = (\operatorname{Im} \partial^T_{q+1})^\perp$ и $\operatorname{Im} \partial^S_{n-q+1} = (\operatorname{Ker} \partial^T_q)^\perp$, где ортогональные дополнения (аннуляторы) берутся в пространстве $\mathcal{K}^S_{n-q}(X)$ по отношению к определенному выше спариванию $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Поскольку $B^\perp / A^\perp$ изоморфно A/B для любых линейных пространств $B \subset A$, теорема доказана. □

Заметим, что в равенстве $H_q(X, \mathbb{R}) = H_{n-q}(X, \mathbb{R})$ поле $\mathbb{R}$ можно заменить на любое другое поле. Однако для гомологий с целыми коэффициентами теорема неверна даже для ориентируемых многообразий. Примером может служить многообразие $\mathbb{R}P^3$, гомологии которого (легко вычисляемые клеточным методом) такие: $H_0 = H_3 = \mathbb{Z}$, $H_1 = \mathbb{Z}_2$, $H_2 = 0$.

Из леммы 1 вытекает такое

Следствие. *Спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ продолжается до гомоморфизма $P : H_q(X) \otimes H_{n-q}(X) \to \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $s_1 \in H_q(X)$, $s_2 \in H_{n-q}(X)$ — классы гомологий, представленные циклами σ_1, σ_2. Положим по определению $F(s_1 \otimes s_2) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$. Тогда если $\sigma_1' = \sigma_1 + \partial\tau$ — другой представитель того же класса, то $\langle \sigma_1' - \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \langle \partial\tau, \sigma_2 \rangle = \pm\langle \tau, \partial\sigma_2 \rangle = 0$. □

Замечание 1. В определении гомоморфизма P участвует триангуляция многообразия X. Важный геометрический факт состоит в том, что гомоморфизм F (в отличие от самого спаривания клеточных цепей !) *от триангуляции не зависит*. Доказательство этого, а также выяснение истинного геометрического смысла гомоморфизма P будет дано в последующих лекциях после определения понятия когомологий.

Пусть Y_1, Y_2 — подмногообразия многообразия X, и $a \in Y_1 \cap Y_2$. Тогда касательные пространства $T_a Y_1, T_a Y_2$ являются линейными подпространствами пространства $T_a X$. Говорят, что подмногообразия Y_1, Y_2 пересекаются в точке a трансверсально, если линейная оболочка подпространств $T_a Y_1, T_a Y_2$ совпадает со всем пространством $T_a X$. Из теоремы о неявной функции вытекает такое утверждение:

Предложение 1. *Пусть Y_1, Y_2 пересекаются в точке a трансверсально. Тогда пересечение $Y_1 \cap Y_2$ в некоторой окрестности точки a представляет собой гладкое многообразие размерности $m_1 + m_2 - n$, где $m_1 = \dim Y_1$, $m_2 = \dim Y_2$, $n = \dim X$.*

Важнейшим результатом о многообразиях является такая теорема:

Теорема (о трансверсальном пересечении). *Пусть Y_1, Y_2 — произвольные подмногообразия гладкого многообразия X. Тогда существует многообразие Y_2', гомотопное Y_2 и пересекающее Y_1 трансверсально (во всех точках пересечения). При этом гомотопия, соединяющая Y_2 и Y_2', может быть выбрана произвольно малой (в любой метрике на X).*

Мы не будем доказывать эту теорему. Она является частным случаем более общей теоремы Тома о трансверсальности. Из теоремы о пересечении и предложения 1 вытекает, в частности, что если $\dim Y_1 + \dim Y_2 < \dim X$, то малым шевелением можно добиться, чтобы подмногообразия не пересекались вовсе; если же $\dim Y_1 + \dim Y_2 = \dim X$, то пересечением будет нульмерное многообразие, т.е. совокупность изолированных точек. Если хотя бы одно из многообразий Y_1, Y_2 компактно, то этих точек будет конечное число.

Нам потребуется также уточнить теорему о существовании триангуляции у произвольного многообразия следующим образом:

Теорема 2 (относительный вариант теоремы о триангуляции). *Пусть Y_1, Y_2 — трансверсально пересекающиеся подмногообразия многообразия X. Тогда существует такая триангуляция $\mathcal{T}$ многообразия X, что подмногообразие Y_1 составлено целиком из симплексов триангуляции $\mathcal{T}$, а подмногообразие Y_2 — из барицентрических звезд триангуляции $\mathcal{T}$. При этом если X компактно, то триангуляция может быть выбрана конечной; если X и Y_1 ориентированы — то согласованной с их ориентацией.*

Напомним, что подмногообразие $Y \subset X$ предполагается замкнутым в топологическом смысле (т.е. как подмножество топологического пространства X). Отсюда вытекает, что если X компактно, то Y_1 и Y_2 тоже компактны (и тем самым допускают конечное клеточное разбиение).

Если ориентированы все три многообразия X, Y_1, Y_2, то в общем случае невозможно выбрать триангуляцию так, чтобы она была согласована со всеми тремя ориентациями. Вот как проявляется это обстоятельство в случае, когда $\dim Y_1 + \dim Y_2 = \dim X$. Пусть подмногообразия Y_1, Y_2 пересекаются трансверсально в точке a. Тогда в подпространствах T_aY_1, T_aY_2 возникает естественная ориентация. Это позволяет наделить ориентацией прямую сумму $T_aY_1 \oplus T_aY_2$, выбрав в ней в качестве "правого" базиса $e_1, \dots, e_{m_1}, f_1, \dots, f_{m_2}$, где $e_1, \dots, e_{m_1}$ и $f_1, \dots, f_{m_2}$ — "правые" базисы в подпространствах T_aY_1 и T_aY_2 соответственно (проверьте, что от их выбора ориентация не зависит !). Однако при выбранном соотношении размерностей $T_aY_1 \oplus T_aY_2 = T_aX$ (в общем случае сумма не прямая). Припишем точке a знак $\sigma(a) = +1$, если ориентация T_aX (порожденная ориентацией многообразия X) совпадает с только что определенной ориентацией прямой суммы, и знак $\sigma(a) = -1$ в противном случае.

Теорема 3. *Пусть Y_1, Y_2 — гладкие замкнутые ориентированные подмногообразия замкнутого ориентированного многообразия X. Пусть $m_1 + m_2 = n$, где $m_1 = \dim Y_1$, $m_2 = \dim Y_2$, $n = \dim X$, и подмногообразия Y_1, Y_2 пересекаются трансверсально во всех точках пересечения. Обозначим $s_1 \in H_{m_1}(X)$ и $s_2 \in H_{m_2}(X)$ классы гомологий, представленные многообразиями Y_1 и Y_2 соответственно. Тогда $\langle s_1, s_2 \rangle = \sum_{a \in Y_1 \cap Y_2} \sigma(a)$, где спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ вычисляется по отношению к триангуляции $\mathcal{T}$, упомянутой в теореме 2.*

Доказательство очевидным образом вытекает из того факта, что каждый симплекс триангуляции теоремы 2 пересекается со своей барицентрической звездой ровно в одной точке, а с барицентрическими звездами других симплексов не пересекается вовсе. Особенно важна эта теорема ввиду замечания 1.