ЛЕКЦИЯ 6. КОГОМОЛОГИИ.

Сингулярной q-мерной коцепью топологического пространства X называется гомоморфизм $\mathcal{C}_q(X) \to \mathbb{Z}$ (заметим, что никаких условий типа непрерывности не накладывается !). Множество q-мерных коцепей обозначается $\mathcal{C}^q(X)$. Кограничный оператор $\delta_q : \mathcal{C}^q(X) \to \mathcal{C}^{q+1}(X)$ определяется как сопряженный к граничному оператору ∂ на цепях: $(\delta\alpha)(c) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \alpha(\partial c)$. Очевидно, $\delta_q \circ \delta_{q-1} = 0$, то есть $\mathrm{Im}(\delta_{q-1}) \subset \delta_{\mathrm{q}}$; фактор $H^q(X) = \delta_{\mathrm{q}} / \mathrm{Im}(\delta_{q-1})$ называется q-мерными (сингулярными) когомологиями пространства X. Последовательность $0 \to \mathcal{C}^0(X) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{C}^1(X) \xrightarrow{\delta_1} \dots$ называется коцепным комплексом пространства X.

Пример 1. 0-мерные коцепи это функции на пространстве X. Кограничный оператор δ_{-1} отсутствует, так что ненулевых 0-мерных кограниц не существует. Условие коцикла $\delta_0\alpha = 0$ означает, что функция α постоянна на любой компоненте линейной связности пространства X. Тем самым $H^0(X) = \prod_{i\in\pi_0(X)} \mathbb{Z}$. Тем самым, если $\pi_0(X)$ (множество компонент линейной связности пространства X) конечно, то $H^0(X) = H_0(X)$; если оно бесконечно, то прямое произведение отлично от прямой суммы: функция может быть не равна нулю на бесконечном количестве компонент линейной связности, в то время как 0-цикл это линейная комбинация конечного количества точек. В любом случае $H_0(X) = \mathrm{Hom}(H_0(X), \mathbb{Z})$.

Всякий элемент $\alpha \in H^q(X)$ порождает гомоморфизм $\widetilde{\alpha} : H_q(X) \to \mathbb{Z}$, действующий по правилу $\widetilde{\alpha}(\gamma) = a(c)$, где a — произвольный коцикл, представляющий класс гомологий α, а c — произвольный цикл, представляющий класс гомологий γ. Нетрудно видеть, что замена $a \mapsto a + \delta b$ и $c \mapsto c + \partial d$ не меняет значения $a(c)$, так что гомоморфизм $\widetilde{\alpha}$ определен корректно.

Отображение $\alpha \to \widetilde{\alpha}$ является гомоморфизмом $H^q(X) \to \mathrm{Hom}(H_q(X), \mathbb{Z})$. Можно доказать (мы не будем этого делать), что это эпиморфизм; мономорфизмом он в общем случае не является.

Непрерывное отображение $f : X \to Y$ порождает гомоморфизм $f^* : \mathcal{C}^q(Y) \to \mathcal{C}^q(X)$, сопряженный соответствующему гомоморфизму на цепях $f_* : \mathcal{C}^q(X) \to \mathcal{C}^q(Y)$, т.е. действующий по правилу $f^*\alpha(c) = \alpha(f_*c)$. Очевидно, f^* является морфизмом коцепных комплексов, т.е. коммутирует с дифференциалом. Это порождает соответствующее отображение в когомологиях $f^* : H^q(Y) \to H^q(X)$.

Теорема 1. *Если отображения $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ гомотопны, то гомоморфизмы $f^* : H^q(Y) \to H^q(X)$ и $g^* : H^q(Y) \to H^q(X)$ совпадают для всех q.*

Следствие. *Когомологии гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.*

Доказательство совершенно такое же, как для гомологий.

Пусть теперь $Y \subset X$ — топологическое подпространство (т.е. подмножество с индуцированной топологией). Группа $\mathcal{C}^q(X, Y) \subset \mathcal{C}^q(X)$ состоит из коцепей на X, равных нулю на каждом сингулярном симплексе, образ которого лежит целиком в Y. Нетрудно видеть, что дифференциал δ_q переводит $\mathcal{C}^q(X, Y)$ в $\mathcal{C}^{q+1}(X, Y)$, и тем самым возникает относительный коцепной комплекс, когомологии которого обозначаются $H^q(X, Y)$. Так же, как и для гомологий, определяются точные последовательности пар и троек (стрелки в них направлены в противоположную, по сравнению с гомологиями, сторону).

Пусть теперь X — клеточное пространство. q-мерной клеточной коцепью называется гомоморфизм $\mathcal{K}_q(X) \to \mathbb{Z}$; кограничный оператор $\delta_q : \mathcal{K}_q(X) \to \mathcal{K}_{q+1}(X)$ определяется как сопряженный к граничному оператору ∂_q: $(\delta_q a)(\sigma) = \sum_\tau [\sigma : \tau] a(\tau)$, где σ — $(q+1)$-мерная клетка, а сумма берется по множеству всех q-мерных клеток τ.

Теорема 2. *Последовательность $\dots \xrightarrow{\delta_{q-1}} \mathcal{K}^q(X) \xrightarrow{\delta_q} \mathcal{K}^{q+1}(X) \xrightarrow{\delta_{q+1}} \dots$ представляет собой комплекс, когомологии которого изоморфны $H^{\cdot}(X)$.*

Доказательство — такое же, как для гомологий.

Следствием теоремы 2 является

Теорема 3. *Пусть X — конечное клеточное пространство. Тогда отображение $H^q(X, \mathbb{R}) \to (H_q(X, \mathbb{R}))^*$, определенное выше, является изоморфизмом (и, следовательно, $H_q(X, \mathbb{R})$ и $H^q(X, \mathbb{R})$ изоморфны). Если Y — другое конечное клеточное пространство, то линейный оператор $f^* : H^q(Y, \mathbb{R}) \to H^q(X, \mathbb{R})$ сопряжен оператору $f_* : H_q(X, \mathbb{R}) \to H_q(Y, \mathbb{R})$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что для конечного клеточного пространства $\mathcal{C}^q(X, \mathbb{R}) = (\mathcal{C}_q(X, \mathbb{R}))^*$, оператор δ_q сопряжен оператору ∂_{q+1}, пространство коциклов $\mathrm{Ker}\,\delta_q$ — аннулятор пространства границ $\mathrm{Im}\,\partial_{q+1}$, а пространство кограниц $\mathrm{Im}\,\delta_{q-1}$ — аннулятор пространства циклов $\mathrm{Ker}\,\partial_q$. Отсюда следует первое утверждение теоремы. Второе вытекает непосредственно из определения. $\square$

Как обычно, $\mathbb{R}$ в этой теореме можно заменить любым полем. Для когомологий с целыми коэффициентами теорема неверна: например, $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$, но $H^2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2 \neq \mathrm{Hom}(H_2(\mathbb{R}P^2), \mathbb{Z})$.

Сингулярные гомологии топологического пространства X можно строить, исходя не только из сингулярных симплексов, но и из сингулярных кубов. Пусть $R_q = [-1,1]^q$ — стандартный куб. Тогда сингулярный куб это непрерывное отображение $f : R_q \to X$, "кубическая" сингулярная цепь это формальная сумма сингулярных кубов с целыми коэффициентами, а граничный оператор определяется как $\partial f = \sum_{i=1}^q (-1)^i (f \circ \Lambda_i^+ - f \circ \Lambda_i^-)$, где $\Lambda_i^+ : R_{q-1} \to R_q$ — отображение $(q-1)$-мерного куба на грань q-мерного, которое вставляет в последовательность $(x_1, \dots, x_{q-1}) \in [-1,1]^{q-1}$ единицу на i-ом месте; отображение $\Lambda_i^- : R_{q-1} \to R_q$ вставляет -1. Нетрудно видеть, что $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, и тем самым пространства сингулярных "кубических" цепей образуют комплекс. Гомологии этого комплекса равны гомологиям комплекса "симплициальных" сингулярных цепей (т.е. обычным сингулярным гомологиям пространства X) — доказательство этого факта несложно (мы не приводим его подробно) и основано на том очевидном факте, что стандартный куб можно триангулировать (придумайте, как !), а стандартный симплекс — разбить на многогранники, гомеоморфные стандартным кубам с сохранением структуры граней (для этого нужно сделать барицентрическое подразделение и рассмотреть звезды вершин). Мы будем в этой лекции подразумевать под сингулярными цепями, гомологиями и т.п., кубические.

Пусть $a \in \mathcal{C}^p(X)$, $b \in \mathcal{C}^q(X)$, и $\sigma : R_{p+q} \to X$ — сингулярный куб размерности $p+q$. Пусть $I_{st} : R_s \to R_t$ — отображение, действующее по правилу $I_{st}(x_1, \dots, x_s) = (x_1, \dots, x_s, -1, \dots, -1)$, а $I'_{st} : R_s \to R_t$ — по правилу $I'_{st}(x_1, \dots, x_s) = (-1, \dots, -1, x_1, \dots, x_s)$. Определим теперь сингулярную цепь $a \cup b \in \mathcal{C}^{p+q}(X)$ равенством $(a \cup b)(f) = \frac{1}{2}(a(f \circ I_{p,p+q}) b(f \circ I'_{q,p+q}) + (-1)^{pq} b(f \circ I_{q,p+q}) a(f \circ I'_{p,p+q}))$. Очевидно, $\cup$ — билинейное умножение в группе сигулярных коцепей.

Предложение 1. *Построенное умножение коцепей обладает следующими свойствами:*

1. *Ассоциативность:* $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$.
2. *Супер-коммутативность:* $(a \cup b) = (-1)^{pq}(b \cup a)$.
3. *Супер-тождество Лейбница:* $\delta(a \cup b) = \delta a \cup b + (-1)^p a \cup \delta b$
4. *Естественность: если* $f : X \to Y$ *— непрерывное отображение, то* $f^* a \cup f^* b = f^*(a \cup b)$ *для произвольных сингулярных коцепей* a, b *пространства* Y.

Доказательство — прямая проверка.

Пусть теперь $\alpha \in H^p(X)$, $\beta \in H^q(X)$ — классы, представленные коциклами a и b. Из тождества Лейбница следует, что $\delta(a \cup b) = 0$ и, следовательно, $a \cup b$ представляет некоторый класс когомологий, который мы обозначим $\alpha \cup \beta$.

Теорема 4. *Построенное умножение* $H^p(X) \otimes H^q(X) \to H^{p+q}(X)$ *определено корректно и превращает прямую сумму* $H^{\cdot}(X) = \bigoplus_i H^i(X)$ *в градуированное ассоциативное супер-коммутативное кольцо. Если* $f : X \to Y$ *— непрерывное отображение, то* $f^* : H^{\cdot}(Y) \to H^{\cdot}(X)$ *— гомоморфизм колец.*

Доказательство. Заменим коцикл a на когомологичный ему коцикл $a + \delta c$; тогда $(a+\delta c) \cup b = a \cup b + \delta c \cup b = a \cup b + \delta(c \cup b)$ когомологичен $a \cup b$. Это доказывает корректность. Ассоциативность, коммутативность и естественность вытекают из соответствующих свойств умножения коцепей. □

Пусть X — топологическое пространство, и $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$ — проекции на первый и второй сомножитель соответственно. Пусть $\alpha \in H^p(X)$, $\beta \in H^q(Y)$, тогда определим класс когомологий $\alpha \times \beta \in H^{p+q}(X \times Y)$ равенством $\alpha \times \beta = (p_1^* \alpha) \cup (p_2^* \beta)$. Если теперь $Y = X$, и $\Delta : X \to X \times X$ — диагональное вложение ($\Delta(x) = (x, x)$), то, очевидно, $\alpha \cup \beta = \Delta^*(\alpha \times \beta)$.

Операцию $\times$ легко описать в клеточных терминах:

Теорема 5. *Пусть* X, Y *— клеточные пространства, а* a, b *— клеточные коциклы, представляющие классы когомологий* $\alpha \in H^p(X)$ *и* $\beta \in H^q(Y)$. *Тогда класс когомологий* $\alpha \times \beta$ *представлен коциклом* $a \times b$, *значение которого на клетке* $\sigma \times \tau$ *пространства* $X \times Y$ *равно* $(-1)^{pq} a(\sigma) b(\tau)$.

Доказательство. Пусть вначале X, Y — букеты сфер размерностей p и q соответственно, со стандартным клеточным разбиением. Для них утверждение теоремы можно проверить непосредственно по определению.

Пусть теперь X, Y — произвольные клеточные пространства размерности p и q соответственно. Рассмотрим естественные проекции $\pi_X : X \to X' \overset{\text{def}}{=} X/X^{p-1}$ и $\pi_Y : Y \to Y' \overset{\text{def}}{=} Y/Y^{q-1}$. Пространства X', Y' — букеты сфер, для которых теорема уже доказана. Проекции π_X, π_Y порождают эпиморфизм в когомологиях, т.е. существуют коциклы a', b' такие, что $a = \pi_X^* a'$, $b = \pi_Y^* b'$. Отсюда в силу естественности операции $\times$ получим, что $(a \times b)(\sigma \times \tau) = (\pi_X^* a' \times \pi_Y^* b')(\sigma \times \tau) = (\pi_X \times \pi_Y)^*(a' \times b')(\sigma \times \tau) = (a' \times b')(\pi_X(\sigma) \times \pi_Y(\tau)) = (-1)^{pq} a'(\pi_X(\sigma)) b'(\pi_Y(\tau)) = (-1)^{pq} a(\sigma) b(\tau)$.

Пусть, наконец, X и Y — произвольные клеточные пространства. Здесь доказательство тоже вытекает из естественности: нужно рассмотреть вложения $\iota_X : X^p \to X$ и $\iota_Y : Y^q \to Y$, которые порождают мономорфизмы в гомологиях. □