ЛЕКЦИЯ 7. КОГОМОЛОГИИ ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЙ.

Пусть $\sigma : R_{p+q} \to X$ — сингулярный куб, а $a \in \mathcal{C}^p(X)$ — коцепь. Тогда можно определить коцепь $\sigma \cap a \in \mathcal{C}_q(X)$ равенством $\sigma \cap a = \frac{1}{2}\left(a(\sigma \circ \Lambda_{p,p+q})(\sigma \circ \Lambda'_{q,p+q}) + (-1)^{pq} a(\sigma \circ \Lambda'_{p,p+q})(\sigma \circ \Lambda_{q,p+q})\right)$, где отображения $\Lambda_{st}, \Lambda'_{st} : R_s \to R_t$ определены в предыдущей лекции.

Предложение 1. *Построенная операция обладает следующими свойствами:*

1. $\partial(\sigma \cap a) = (\partial\sigma) \cap a + (-1)^{p+q}\sigma \cap (\delta\alpha)$.
2. $\sigma \cap (a \cup b) = (\sigma \cap a) \cap b$.
3. *Если* $f : X \to Y$ *— непрерывное отображение, то* $(f_*\sigma) \cap a = f_*(\sigma \cap f^*a)$.

Доказательство — прямая проверка. Свойство 1 позволяет определить операцию $\cap$ на гомологиях и когомологиях: это гомоморфизм $H_{p+q}(X) \otimes H^p(X) \to H_q(X)$.

“Кубическим” аналогом триангуляции является понятие *кубической тесселяции*: ею называется клеточное разбиение пространства X такое, что каждое характеристическое отображение клетки представляет собой гомеоморфизм $f_\sigma : R_q \to f_\sigma(R_q) \subset X$, причем любые две клетки пересекаются либо по пустому множеству, либо по общему образу грани одной и той же размерности. Барицентрическое подразбиение определяется так: рассмотрим стандартное разбиение куба $R_q = \bigcup_i A_i$ на 2^q кубов с ребром $1/2$. Для каждого такого кубика A_i существует естественное отождествление $p_i : R_q \to A_i$; тогда новая тесселяция $\beta(\mathcal{T})$ есть совокупность всех характеристических отображений вида $f_\sigma|_{A_i} \circ p_i : R_q \to X$. Барицентрической звездой куба тесселяции (произвольной размерности) называется совокупность кубов ее барицентрического подразделения, пересекающихся с данным кубом ровно в одной точке. Так же, как и для триангуляций, определяется понятие индекса пересечения двух циклов дополнительной размерности по отношению к данной кубической тесселяции.

Пусть X — n-мерное многообразие, Y, Z — его замкнутые подмногообразия, пересекающиеся трансверсально. Следующие факты полностью аналогичны соответствующим теоремам про триангуляции:

1. Существует такая кубическая тесселяция $\mathcal{T}$ многообразия X, что подмногообразие Y составлено целиком из кубов тесселяции $\mathcal{T}$, а подмногообразие Z — из барицентрических звезд тесселяции $\mathcal{T}$. При этом если X компактно, то тесселяция может быть выбрана конечной; если X и Y ориентированы — то согласованной с их ориентацией.
2. Если X замкнуто и ориентировано, то $H_n(X) = H^n(X) = \mathbb{Z}$; в качестве образующей группы $H_n(X)$ можно взять класс гомологий цикла $[X]_\mathcal{T}$, равного сумме характеристических отображений всех кубов произвольной тесселяции $\mathcal{T}$, согласованной с ориентацией. В качестве образующей группы $H^n(X)$ можно выбрать коцикл, принимающий значение $1/N$ на каждом сингулярном кубе старшей размерности, вошедшем в $[X]_\mathcal{T}$, и 0 на всех остальных кубах; здесь N — количество кубов старшей размерности в $\mathcal{T}$. В неориентируемом случае аналогичные утверждения имеют место с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.
3. Барицентрическая звезда всякого q-мерного куба тесселяции $\mathcal{T}$ гомеоморфна шару размерности $(n-q)$; барицентрические звезды образуют клеточное разбиение многообразия X.

Пусть теперь X — замкнутое n-мерное многообразие, наделенное кубической тесселяцией $\mathcal{T}$.

Лемма 1. *Если* $a \in \mathcal{C}^q(X)$ *— коцепь, принимающая значение 1 на определенном q-мерном кубе Δ тесселяции $\mathcal{T}$ и значение 0 на прочих кубах той же размерности, то* $[X]_{\beta(\mathcal{T})} \cap a = \Delta^*$ *— барицентрическая звезда куба* Δ.

Лемма вытекает непосредственно из определений.

Следствие. *Если* $a \in \mathcal{C}^q(X)$, $\sigma \in \mathcal{C}_q(X)$, *то индекс пересечения циклов* $[X]_\mathcal{T} \cap a$ *и* σ *по отношению к кубической тесселяции* $\mathcal{T}$ *равен* $a(\sigma)$.

Теорема 1. *Индекс пересечения циклов дополнительной размерности в компактном многообразии X не зависит от выбора тесселяции и не меняется при замене цикла на когомологичный.*

Доказательство. Пусть σ, τ — два цикла размерностей q и $n-q$ соответственно. Поскольку барицентрические звезды произвольной тесселяции $\mathcal{T}$ представляют собой клеточное разбиение многообразия, найдется такая коцепь a размерности $n-q$, что $[X]_\mathcal{T} \cap a = [\sigma] \in H_q(X)$. Теперь $\langle \sigma, \tau \rangle_\mathcal{T} = a(\tau)$ — не зависит от тесселяции, поскольку циклы $[X]_\mathcal{T}$ для разных $\mathcal{T}$ гомологичны друг другу. □

Вот одно из бесчисленных следствий теоремы 1:

Следствие. *Всякое компактное гладкое подмногообразие M размерности n, вложенное в $\mathbb{R}^{n+1}$, разделяет его на части, т.е. дополнение $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ несвязно.*

Доказательство. Дополним $\mathbb{R}^{n+1}$ бесконечной точкой так, чтобы получилось S^{n+1} — ясно, что достаточно доказать, что $S^{n+1}\setminus M$ несвязно. Локально многообразие M устроено как гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $a, b \in S^{n+1}\setminus M$ — точки, находящиеся вблизи многообразия M, но по разные стороны от него, так что отрезок $[ab]$ пересекает M в единственной точке. Докажем, что a и b находятся в разных компонентах линейной связности пространства $S^{n+1}\setminus M$. Действительно, если существует непрерывная кривая $\gamma : [0,1] \to S^{n+1}\setminus M$ такая, что $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, то объединение этой кривой с отрезком $[ab]$ представляет собой замкнутое одномерное многообразие L, пересекающееся с M в единственной точке, так что $\langle [L], [M]\rangle = \pm 1$, где $[L] \in H_1(S^{n+1})$ и $[M] \in H_n(S^{n+1})$ — классы гомологий, представленные соответствующими многообразиями. Но $H_1(S^{n+1}) = 0$, так что индекс пересечения должен быть равен нулю. □

Если подмногообразия X, Y размерностей p, q многообразия M размерности n пересекаются трансверсально, то из теоремы о неявной функции следует, что их пересечение — подмногообразие Z размерности $p+q-n$. Если M, X, Y ориентированы, то Z наделяется естественной ориентацией таким способом: пусть $a \in Z = X\cap Y$. Тогда в линейном пространстве T_aM имеются два подпространства T_aX и T_aY, пересечение которых есть T_aZ. Назовем базис $e_1, \dots, e_{p+q-n} \in T_aZ$ правым, если его можно дополнить такими векторами $f_1, \dots, f_{n-q}; g_1, \dots, g_{n-p} \in T_aM$, что $f_1, \dots, f_{n-q}, e_1, \dots, e_{p+q-n}$ — правый (т.е. согласованный с ориентацией) базис в T_aX, $e_1, \dots, e_{p+q-n}, g_1, \dots, g_{n-p}$ — правый базис в T_aY, а все вместе, $f_1, \dots, f_{n-q}, e_1, \dots, e_{p+q-n} g_1, \dots, g_{n-p}$ — правый базис в T_aM.

Теорема 2. *Пусть X, Y — замкнутые ориентированные подмногообразия размерности p, q замкнутого ориентированного многообразия M размерности n. Пусть $X\cap Y = Z$, где пересечение трансверсально, а Z наделено индуцированной ориентацией. Пусть $\alpha \in H^{n-p}(M)$, $\beta \in H^{n-q}(M)$ таковы, что $[M]\cap\alpha = [X]$, $[M]\cap\beta = [Y]$. Тогда $[M]\cap(\alpha\cup\beta) = [Z]$.*

Доказательство. Выберем в многообразии M кубическую тесселяцию $\mathcal{T}$, согласованную с X и Y, и пусть a, b — коциклы, представляющие классы когомологий α, β. Обозначим $\iota_X : X \to M$, $\iota_Y : Y \to M$ тавтологические вложения, а $s_X \in \mathcal{C}_p(X)$, $s_Y \in \mathcal{C}_q(Y)$ — образующие старших гомологий X и Y, так что $(\iota_X)_* s_X = [X]_{\mathcal{T}}$, $(\iota_Y)_* s_Y = [Y]_{\beta(\mathcal{T})}$. Пусть также $s_Z \in \mathcal{C}_{p+q-n}(X)$ — класс, представленный Z, так что $[Z] = (\iota_X)_* s_Z$.

Согласно предложению 1 имеем: $[M]_{\mathcal{T}}\cap(a\cup b) = ([M]_{\mathcal{T}}\cap a)\cap b = [X]_{\mathcal{T}}\cap b = (\iota_X)_*(s_X\cap\iota_X^* a) = (\iota_X)_* s_Z$ (согласно лемме 1) $= [Z]$. □

Пример 1. Вычислим умножение в $H^{\cdot}(\mathbb{C}P^n)$. Здесь $H^{2k}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$, и образующей является класс x_k такой, что $[M]\cap x_k$ — класс гомологий проективного подпространства $X_{n-k} = \mathbb{C}P^{n-k}$, стандартно вложенного в $\mathbb{C}P^n$. Нетрудно видеть, что пересечение подмногообразий X_p и X_q, пересекающихся трансверсально, есть X_{p+q-n}, если $p+q \geq n$. Если $p+q < n$, то многообразия X_p и X_q не пересекаются. Нетрудно увидеть, что ориентация пересечения совпадает с существующей ориентацией проективного подпространства. Отсюда $x_k\cup x_l = \pm x_{k+l}$, если $k+l\leq n$, и $x_k\cup x_l = 0$, если $k+l > n$. Тем самым $x_k = x^k$, где $x \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \in H^2(\mathbb{C}P^n)$, и $x^{n+1} = 0$. Иными словами, $H^{\cdot}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$, где образующая x имеет градуировку 2.