# ЛЕКЦИЯ 8. ФОРМУЛА ЛЕФШЕЦА И КОЭФФИЦИЕНТ ЗАЦЕПЛЕНИЯ.

Пусть $X, Y$ — топологические пространства, $a : R_p \to X$, $b : R_q \to Y$ — сингулярные кубы. Определим отображение $a \times b : R_p \times R_q \to X \times Y$ формулой $(a \times b)(x, y) = (a(x), b(y))$. Поскольку $R_p \times R_q = R_{p+q}$, это сингулярный куб. Продолжая это отображение по линейности получим гомоморфизм $\times : \mathcal{C}_p(X) \otimes \mathcal{C}_q(Y) \to \mathcal{C}_{p+q}(X \times Y)$. Очевидно, $\partial(a \times b) = (\partial a) \times b + (-1)^p a \times (\partial b)$, что позволяет, как обычно, определить отображение $\times : H_p(X) \otimes H_q(Y) \to H_{p+q}(X \times Y)$. Отображения $\times$ для цепей и коцепей (а также для гомологий и когомологий) связаны формулой $(a \times b)(\alpha \times \beta) = (-1)^{pq} a(\alpha) b(\beta)$, которая вытекает непосредственно из определения.

Пусть $X$ — замкнутое ориентированное $n$-мерное многообразие. Напомним, что для компактного многообразия $H^i(X, \mathbb{R})$ канонически изоморфно двойственному пространству к $H_i(X, \mathbb{R})$; это означает, что индекс пересечения определяет невырожденное спаривание гомологий дополнительных размерностей (с вещественными коэффициентами). В дальнейшем в этой лекции мы будем считать (не отмечая этого специально в обозначениях), что все гомологии и когомологии вычисляются с действительными коэффициентами.

Пусть $f : X \to X$ — гладкое отображение. Обозначим $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times X$ график отображения $f$. Очевидно, $\Gamma_f$ является замкнутым подмногообразием в $X \times X$ и представляет гомологический класс $[\Gamma_f] = (\mathrm{id} \times f)_*[X]$.

**Предложение 1.** *Для произвольных классов гомологий $\alpha \in H_q(X)$, $\beta \in H_{n-q}(X)$ верна формула $\langle f_*\alpha, \beta\rangle = (-1)^q \langle [\Gamma_f], \alpha \times \beta\rangle$.*

*Доказательство.* Пусть $\alpha = [X] \cap a$, $\beta = [X] \cap b$ для некоторых классов когомологий $a \in H^{n-q}(X)$, $b \in H^q(X)$. Тогда $\langle f_*\alpha, \beta\rangle = (-1)^q \langle [X] \cap b, f_*\alpha\rangle = (-1)^q b(f_*\alpha) = (-1)^q (f^*b)(\alpha)$. С другой стороны, $\alpha \times \beta = [X \times X] \cap (a \times b) = ([X] \times [X]) \cap (a \times b)$, откуда $\langle [\Gamma_f], \alpha \times \beta\rangle = (a \times b)((\mathrm{id} \times f)_*[X]) = ((\mathrm{id} \times f)^*(a \times b))([X]) = (a \cup f^*b)([X]) = (f^*b)(\alpha)$. □

Обозначим $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ какой-либо базис в $H^{\cdot}(X, \mathbb{R}) = \bigoplus_{i=0}^n H_i(X, \mathbb{R})$ (упорядоченный по размерности), и пусть $\beta_1, \dots, \beta_N$ — двойственный базис относительно индекса пересечения: $\langle \alpha_i, \beta_j\rangle = \delta_{ij}$.

**Следствие.** $[\Gamma_f] = \sum_{k=1}^N \alpha_k \times f_*\beta_k$. *В частности (при $f = \mathrm{id}$) получим, что гомологический класс диагонали $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ равен $\sum_{k=1}^N \alpha_k \times \beta_k$.*

*Доказательство.* Из предложения 1 вытекает, что левая и правая части равенства имеют один и тот же индекс пересечения с любым классом вида $\beta_i \times \alpha_j$. Такие классы образуют базис в $H^{\cdot}(X \times X, \mathbb{R})$, а индекс пересечения — невырожденное спаривание. □

**Теорема 1** (формула Лефшеца). *Пусть $X$ — замкнутое ориентируемое многообразие, $f : X \to X$ — непрерывное отображение, и $t_i$ — след отображения $f_* : H_i(X) \to H_i(X)$. Тогда $\langle[\Gamma_f], [\Delta]\rangle = \sum_{i=1}^n (-1)^i t_i$.*

*Доказательство.* Пусть, в обозначениях предыдущего следствия, $f_*\alpha_i = \sum_{j=1}^n f_{ij}\alpha_j$. Обозначим $q_i$ размерность класса гомологий $\alpha_i$. Из предложения 1 и следствия вытекает, что $\langle[\Gamma_f], [\Delta]\rangle = \langle[\Gamma_f], \sum_{k=1}^N \alpha_k \times \beta_k\rangle = \sum_{k=1}^N (-1)^{q_k}\langle f_*\alpha_k, \beta_k\rangle = \sum_{k=1}^N (-1)^{q_k} f_{kk} = \sum_{i=1}^n (-1)^i t_i$. □

*Замечание.* На самом деле требование ориентируемости здесь излишне, но доказательство в неориентируемом случае требует более изощренной техники.

Точка пересечения $\Gamma_f$ с диагональю имеет вид $(x, x)$, где $f(x) = x$ — неподвижная точка отображения $f$. Это пересечение трансверсально, если $T_{(x,x)}\Gamma_f$ не содержит ненулевых векторов вида $(v, v) \in T_xX \times T_xX = T_{x,x}(X \times X)$. Но $T_{(x,x)}\Gamma_f$ — образ оператора $\mathrm{id} \oplus f'(x) : T_xX \to T_xX \times T_xX$. Иными словами, для трансверсальности требуется, чтобы равенство $f'(x)v = v$ выполнялось только при $v = 0$ — т.е. 1 не являлась собственным значением $f'(x)$. Нетрудно видеть, что если пересечение графика с диагональю в точке $(x, x)$ трансверсально, то его знак равен $\det(f'(x) - \mathrm{id})$.

Пусть $V$ — векторное поле на многообразии $X$, то есть сечение касательного расслоения $TX \to X$. Предположим, что $V$ имеет конечное количество особых точек (точек $x$, где $V(x) = 0$). Тогда для каждой такой точки рассмотрим гиперповерхность $M_x \subset X$, гомеоморфную $(n-1)$-мерной сфере и ограничивающую диск $N_x \subset X$, внутри которого лежит точка $x$, и не лежат никакие иные особые точки поля $V$. Над диском $N_x$ касательное расслоение тривиально по лемме Фельдбау, поэтому $V|_{N_x}$ можно рассматривать как отображение $N_x \to \mathbb{R}^n$. На сфере $M_x$ поле отлично от нуля, поэтому определено отображение $V : M_x \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Стягивая $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ на единичную сферу, получим отображение $G_{M_x} : S^{n-1} \to S^{n-1}$, степень которого обозначается $\mathrm{ind}(x, V)$ и называется индексом особой точки $x$ поля $V$. Нетрудно видеть, что от выбора сферы $M_x$ это число не зависит. Эта степень также равна индексу пересечения $\langle V_*([M_x]), pt\rangle$ в сфере $S^{n-1}$.

**Предложение 2.** *Пусть $M \subset X$ — вложенная $(n-1)$-мерная сфера, ограничивающая диск $N \subset X$, содержащий внутри особые точки $x_1, \dots, x_p$ поля $V$. Определим для сферы $M$ отображение $G_M : S^{n-1} \to S^{n-1}$. Тогда его степень равна $\sum_i \mathrm{ind}(x_i, V)$.*

*Доказательство.* Рассмотрим многообразие $A = N \setminus \bigcup_i N_{x_i}$. Имеем $0 = \langle V_*([\partial A]), pt\rangle = \langle V_*([M]), pt\rangle - \sum_i \langle V_*([M_{x_i}]), pt\rangle = \deg G_M - \sum_i \mathrm{ind}(x_i, V)$. □

**Теорема 2** (Пуанкаре). $\sum_x \mathrm{ind}(x, V) = \chi(X)$, *где сумма берется по всем особым точкам векторного поля, а* $\chi(X) \overset{def}{=} \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim H^q(X, \mathbb{R})$ *— эйлерова характеристика.*

*Доказательство.* Из теоремы Тома о трансверсальности следует, что поле $V$ можно сколь угодно мало пошевелить так, чтобы в каждой особой точке $x$ пошевеленного поля матрица частных производных $\Delta_x = (\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x))$ (в произвольной системе координат) была невырождена. При малом шевелении степень отображения $G_M$ для произвольной сферы $M$ не меняется, и из предложения 2 следует, что сумма индексов всех особых точек поля тоже не меняется.

Нетрудно проверить, что в невырожденном случае индекс каждой точки $x$ равен $\pm 1$, в зависимости от знака $\det \Delta_x$.

Рассмотрим отображение $f_{V,t} : X \to X$, представляющее собой сдвиг вдоль интегральных кривых поля $V$ за время $t$. Это отображение гомотопно тождественному, поэтому $(f_{V,t})_* : H_q(X,\mathbb{R}) \to H_q(X,\mathbb{R})$ — тождественное отображение, и $t_q = \dim H_q(X,\mathbb{R})$.

Особые точки векторного поля $V$ являются неподвижными точками отображения $f_{V,t}$. Покажем, что при достаточно малом $t$ других неподвижных точек нет. Если поле $V$ достаточно гладко (этого, согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса, можно добиться произвольно малым его шевелением), то для каждой неособой точки $a \in X$ существует окрестность $U_a$, где $V(x) = V(a) + R_a(x)$, где $|R_a(x)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно и выбрано заранее. Если же $a$ — особая точка, то в силу предположения о невырожденности, соответствующее утверждение верно для второго члена ряда Тейлора: существует окрестность $U(a)$, в которой $V(x) = \Delta_a x + R_a(x)$, где $|R_a(x)| < \varepsilon\,|x-a|$ (во всех равенствах мы предполагаем, что в соответствующих окрестностях выбрана система координат). В силу компактности можно взять $t$ настолько малым, чтобы для всех $a \in M$ было выполнено включение $f_{V,t}(a) \in U(a)$. Покроем $X$ конечным количеством окрестностей $U(a)$ (это возможно в силу компактности); в каждой окрестности поле почти равно либо постоянному, либо линейному. Постоянное поле и линейное поле не имеют периодических траекторий, кроме неподвижных точек — следовательно, при малых $t$ равенство $f_{V.t}(a) = a$ возможно только при $V(a) = 0$.

График $\Gamma_{f_{V,t}}$ пересекает диагональ $\Delta$ многообразия $X \times X$ в неподвижных точках отображения $f_{V,t}$, т.е. в особых точках поля $V$. Нетрудно видеть, что в невырожденном случае это пересечение трансверсально, и знак точки пересечения равен в точности индексу соответствующей особой точки поля. Теорема теперь вытекает из формулы Лефшеца. $\square$