КАК ПРАВИЛЬНО ОПРЕДЕЛЯТЬ УМНОЖЕНИЕ КОЦЕПЕЙ И КОГОМОЛОГИЙ

Стандартный симплекс $T_q = \{(x_0, \ldots, x_q) \mid \forall i\, x_i \geq 0, x_0 + \cdots + x_q = 1\}$. Его грани размерности p, $0 \leq p \leq q$, нумеруются подмножествами мощности $p+1$ в множестве $Q = \{0, 1, \ldots, q\}$: если P — такое подмножество, то грань Γ_P задается условием $x_i = 0$ для всех $i \in Q \setminus P$. В частности, вершины нумеруются числами $0, 1, \ldots, q$.

Для каждой упорядоченной последовательности точек $a_0, \ldots, a_q$ в евклидловом пространстве существует единственное аффинное отображение $\Lambda_{(a_0,\ldots,a_q)}$: $T_q \to \mathrm{conv}(\{a_0, \ldots, a_q\})$ стандартного симплекса в выпуклую оболочку точек $a_0, \ldots, a_q$, при котором для каждого i вершина номер i переходит в точку a_i. Если $f : T_q \to X$ — сингулярный q-симплекс, то под ограничением $f|_{(a_0,\ldots,a_p)}$ понимается сингулярный p-симплекс — композиция $\Lambda_{(a_0,\ldots,a_p)}$ и ограничения f на грань $\Gamma_{\{a_0,\ldots,a_p\}}$.

Границей сингулярного симплеса $f : T_q \to X$ называется сингулярная $(q-1)$-цепь $\sum_{i=0}^{q} (-1)^i\, f|_{P_i}$, где последовательность P_i получается из последовательности $(0, \ldots, q)$ вычеркиванием числа i.

Если $a \in \mathcal{C}^p(X)$. $b \in \mathcal{C}^q(X)$, то значение коцепи $a \cup b$ на сингулярном симплексе $f : T_{p+q} \to X$ равно, по определению, $a(f|_{(0,1,\ldots,p)}) b(f|_{(p,p+1,\ldots,p+q)})$; на прочие сингулярные цепи $a \cup b$ продолжается по линейности.

Предложение 1. *Умножение коцепей обладает следующими свойствами:*

1. $\delta(a \cup b) = (\delta a) \cup b + (-1)^p a \cup (\delta b)$.
2. $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$.
3. $(b \cup a)(f) = (a \cup b)(f|_{(p+q,p+q-1,\ldots,0)})$.

Доказательство очевидно.

Свойство 1 (тождество Лейбница) позволяет определить умножение в когомологиях: пусть $\alpha \in H^p(X)$, $\beta \in H^q(X)$ — классы когомологий, представленные циклами a и b. Тогда $a \cup b$ — цикл: $\delta(a \cup b) = (\delta a) \cup b \pm a \cup (\delta b) = 0$; представляемый им класс когомологий обозначим $\alpha \cup \beta$. Определение корректно: если $a' = a + \delta x$ и $b' = b + \delta y$ — другие представители классов α и β, то $a' \cup b' = a \cup b + a \cup (\delta y) + (\delta x) \cup b + (\delta x) \cup (\delta y) = a \cup b + \delta((-1)^{q-1} a \cup y + x \cup b + x \cup (\delta y))$ — представитель того же класса $\alpha \cup \beta$.

Предложение 1'. *Умножение когомологий обладает следующими свойствами:*

1. $\delta(\alpha \cup \beta) = (\delta\alpha) \cup \beta + (-1)^p \alpha \cup (\delta\beta)$.
2. $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$.
3. $\beta \cup \alpha = (-1)^{pq}(\alpha \cup \beta)$.

Доказательство. Свойства 1 и 2 вытекают из соответствующих свойств умножения коцепей. Для доказательства свойства 3 нужна такая лемма:

Лемма. *Существует цепная гомотопия $\omega : \mathcal{C}_s(X) \to \mathcal{C}_{s+1}(X)$, что для всякого сингулярного симплекса $f : T_s \to X$ верна формула $f_{(s,s-1,\dots,0)} + (-1)^{s(s-1)/2} f = \partial\omega(f) + \omega(\partial f)$.*

Свойство 3 вытекает из леммы, утверждения о том, что цепногомотопные отображения порождают одинаковые отображения в гомологиях, и равенства $(p+q)(p+q-1)/2 = p(p-1)/2 + q(q-1)/2 + pq$. □

Доказательство леммы. Рассмотрим произведение $T_s \times [0,1]$. Это призма, вершины которой нумеруются символами $0, 1, \dots, s$ на нижнем основании и символами $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{s}$ на верхнем основании. Триангулируем призму так (симплексы задаем последовательностями вершин, которые описывают заодно их отождествление со стандартным симплексом): $(0\,1\,2\dots q\,\overline{q}) \cup (0\,1\dots(q-1)\,\overline{q}\,\overline{q-1}) \cup \dots \cup (0\,\overline{q}\,\overline{q-1}\dots\overline{0})$. Определим теперь отображение $\widetilde{f} : T_s \times [0,1] \to X$ равенством $\widetilde{f} = f \circ \pi$, где π — проекция на первый сомножитель и положим, по определению, $\omega(f) = \sum_{t=1}^{s} (-1)^{t(t-1)/2} \left.\widetilde{f}\right|_{m_t}$, где m_t — t-ый симплекс описанной выше триангуляции. Требуемое равенство для отображения ω проверяется напрямую по индукции. □

Пусть $a \in \mathcal{C}^p(X)$, $b \in \mathcal{C}^q(Y)$. По определению, $a \times b = p_X^* a \cup p_Y^* b \in \mathcal{C}^{p+q}(X \times Y)$, где $p_X, p_Y : X \times Y \to X, Y$ — проекции прямого произведения на сомножители.

Предложение 2. *Умножение $\times$ обладает следующими свойствами:*

1. $\delta(a \times b) = (\delta a) \times b + (-1)^p a \times (\delta b)$.
2. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.
3. *Если $Y = X$, и $\Delta : X \to X \times X$ — диагональное вложение, то $\Delta^*(a \times b) = a \cup b$.*

Доказательство очевидно.

Свойство 1 позволяет перенести умножение $\times$ на когомологии, как это делалось с умножением $\cup$. Свойства когомологического $\times$-умножения буквально такие же, как в предложении 2.

Произведение двух стандартных симплексов $T_p \times T_q$ можно триангулировать так: симплексы трангуляции имеют вершины вида $(i_0, j_0), \dots, (j_{p+q}, j_{p+q})$, где пара последовательностей i, j обладает свойствами $i_s \le i_{s+1}$, $j_s \le j_{s+1}$ и $i_s + j_s = s$ для всех $s = 0, 1, \dots, p+q$. Обозначим $\operatorname{sgn}(i,j) = p(p-1)/2 + \sum_{i_s < i_{s+1}} s$.

Тогда для двух сингулярных симплексов $f : T_p \to X$ и $g : T_q \to X$ символом $f \times g \in \mathcal{C}_{p+q}(X \times Y)$ обозначается сингулярная цепь, равная $\sum_{i,j} (-1)^{\operatorname{sgn}(i,j)} \left. f \times g\right|_{m_{ij}}$, где m_{ij} — симплекс, вершины которого задаются парой последовательностей i, j, и в правой части $f \times g : T_p \times T_q \to X$ — декартово произведение отображений.

Предложение 3.

1. $\partial(f \times g) = (\partial f) \times g + (-1)^p f \times (\partial g)$. *Следовательно, умножение $\times$ можно определить для классов гомологий.*
2. $(f \times g) \times h = f \times (g \times h)$.
3. $(a \times b)(f \times g) = (-1)^{pq} a(f) b(g)$.

Доказательство — прямая проверка.

Пусть $f : T_{p+q} \to X$ — сингулярный симплекс, и $a \in \mathcal{C}^p(X)$. Тогда $f \cap a \stackrel{\text{def}}{=} a(\left.f\right|_{(0,1,\dots,p)})\, \left.f\right|_{(p,p+1,\dots,p+q)} \in \mathcal{C}_q(X)$.

Предложение 4.

1. $\partial(f \cap a) = (\partial f) \cap a + (-1)^{p+q} f \cap (\delta a)$. *Следовательно, операция $\cap$ определна на гомологиях и когомологиях.*
2. $(f \cap a) \cap b = f \cap (a \cup b)$.

Доказательство — прямая проверка.