ЛЕКЦИЯ 9. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАЦЕПЛЕНИЯ.

Пусть X — многообразие, $K \subset X$ — замкнутое подмногообразие, и $U(K)$ — достаточно малая открытая трубчатая окрестность K. Напомним, что группа $\mathcal{C}^q(X, K)$ состоит из коцепей в X, принимающая значение 0 на всех цепях, лежащих в K. Вложение $\iota : K \to U(K)$, возникает естественное включение $\iota^* : \mathcal{C}^q(X, U(K)) \to \mathcal{C}^q(X, K)$; поскольку $U(K)$ гомотопически эквивалентно K, это включение порождает изоморфизм в когомологиях $\iota^* : H^q(X, U(K)) \to H^q(X, K)$.

Выберем в X триангуляцию $\mathcal{T}$, триангулирующую одновременно K и настолько мелкую достаточно мелкую, что если симплекс пересекается с K, то он целиком лежит в $U(K)$. Пусть $a \in \mathcal{C}^q(X, K)$. Тогда двойственная по Пуанкаре цепь $[X]_\mathcal{T} \cap (\iota^*)^{-1} a$ не пересекается с K, т.е. принадлежит $\mathcal{C}_{n-q}(X \setminus K)$. Таким образом можно определить индекс пересечения $\langle \alpha, \beta \rangle$ цикла $\alpha = [X] \cap (\iota^*)^{-1} a \in \mathcal{C}_{n-q}(X \setminus K)$ и относительного цикла $\beta \in \mathcal{C}_q(X, K)$ как $a(\beta)$. Если цикл α реализован ориентированным компактным многообразием без края, а цикл β — ориентированным компактным многообразием, край которого лежит в множестве K, и многообразия пересекаются трансверсально, то индекс пересечения равен сумме знаков точек пересечения — доказательство такое же, как и для абсолютных циклов (заметим, что точки пересечения не лежат на крае многообразия, представляющего β, поскольку этот край лежит в K).

Рассмотрим случай, когда $X = S^n$, а $K \in \mathcal{C}_q(S^n)$, $1 \le q \le n-2$. Поскольку $H_q(S^n) = 0$, существует цепь $\Xi \in \mathcal{C}_{q+1}(S^n)$ такая, что $\partial \Xi = K$. Тогда Ξ можно интерпретировать как относительный цикл — элемент $\mathcal{Z}_{q+1}(X, K)$, и, согласно предыдущему, определен индекс пересечения $\langle \Xi, A \rangle$ для всякого $A \in \mathcal{Z}_{n-q-1}(S^n \setminus K)$ (цикла в дополнении к K). Пусть теперь $\Xi' \in \mathcal{C}_{q+1}(S^n)$ — другая цепь со свойством $\partial \Xi' = K$. Поскольку $H_{q+1}(S^n) = 0$, отсюда следует, что $\Xi' - \Xi = \partial \Lambda$ для некоторого $\Lambda \in \mathcal{C}_{q+2}(S^n, K)$, и $\langle \Xi, A \rangle = \langle \Xi', A \rangle + \langle \partial \Lambda, A \rangle = \langle \Xi', A \rangle \pm \langle \Lambda, \partial A \rangle = \langle \Xi', A \rangle$. Тем самым индекс пересечения не зависит от выбора цепи Ξ и определяется только циклами K и A; он называется коэффициентом зацепления и обозначается $\operatorname{lk}(K, A)$. Из сказанного выше следует, что если циклы K и A реализованы в S^n замкнутыми ориентированными подмногообразиями, то $\operatorname{lk}(K, A)$ равен алгебраическому (т.е. со знаками) числу точек пересечения A с произвольным многообразием Ξ с креем K.

Предложение 1. 1. *Если циклы A и A' гомологичны в дополнении к K, то* $\operatorname{lk}(K, A) = \operatorname{lk}(K, A')$.

2. $\operatorname{lk}(K, A) = (-1)^{q(n-q)} \operatorname{lk}(A, K)$.

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из определения. Для доказательства второго положим $K = \partial \Xi$, $A = \partial B$, и тогда $\operatorname{lk}(K, A) = \langle \Xi, A \rangle = (-1)^{(q+1)(n-q)} \langle A, \Xi \rangle = (-1)^{(q+1)(n-q)} \langle \partial B, \Xi \rangle = (-1)^{(q+1)(n-q)+(n-q)} \langle B, \partial \Xi \rangle = (-1)^{q(n-q)} \langle B, K \rangle = (-1)^{q(n-q)} \operatorname{lk}(A, K)$. □

Вот пример применения коэффициента зацепления. Пусть $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ — гладкая замкнутая кривая с отмеченной точкой p, т.е. $\gamma(0) = \gamma(1) = p$,

$\gamma'(0) = \gamma'(1)$ и $\gamma'(t) \neq 0$ при любом t. Пусть $d \in \mathbb{R}^2$ — точка простого трансверсального самопересечения кривой, т.е. $d = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, $t_1 < t_2$, других прообразов точка d не имеет, и векторы $e_1 = \gamma'(t_1)$ и $\gamma'(t_2)$ линейно независимы. Тогда точке можно приписать знак $\varepsilon(d) = +1$, если ориентация базиса (e_1, e_2) на плоскости $\mathbb{R}^2$ положительна, и $\varepsilon(d) = -1$ в противном случае.

Поскольку $\gamma'(t) \neq 0$ и $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, выражение $\gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ определяет непрерывное отображение $S^1 \to S^1$ (левая окружность это $[0,1]$ с отождествленными концами, а правая — множество единичных векторов в $\mathbb{R}^2$). Степень этого отображения называется индексом Уитни кривой и обозначается $\mathrm{w}(\gamma)$.

Рассмотрим точки p_1 и p_2, лежащие вне кривой γ, по разные стороны от нее, и близкие к p. Для каждой из них рассмотрим отображение $\alpha_i : S^1 \to S^1$, где $\alpha_i(t) = (p_i - \gamma(t))/|p_i - \gamma(t)|$. Степни этих отображений обозначим, соответственно, $\mathrm{ind}(p_1, \gamma)$ и $\mathrm{ind}(p_2, \gamma)$. Нетрудно видеть, что эти два числа отличаются на 1; их полусумму (полуцелое число) обозначают $\mathrm{ind}(p, \gamma)$.

Теорема 1 (Уитни). *Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — замкнутая гладкая кривая, все точки самопересечения которой $d_1, \dots, d_N$ — простые и трансверсальные. Тогда $\sum_{i=1}^N \varepsilon(d_i) = \mathrm{w}(\gamma) + 2\,\mathrm{ind}(\gamma, p)$.*

Можно доказать, что произвольную гладкую кривую можно произвольно мало пошевелить так, чтобы она удовлетворяла условиям теоремы.

Доказательство. Зафиксируем достаточно малое число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество C_ε пар точек (a, b), где $\varepsilon \le a$, $b \le 1 - \varepsilon$ и $a \le b - \varepsilon$. Это множество представляет собой треугольник с вершинами $(a, b) = (\varepsilon, 2\varepsilon), (\varepsilon, 1 - \varepsilon), (1 - 2\varepsilon, 1 - \varepsilon)$; соответствующие стороны обозначим S_1, S_2, S_3. Рассмотрим отображение $\Gamma : C_\varepsilon \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $\Gamma(a, b) = \gamma(b) - \gamma(a)$. Добавим к $\mathbb{R}^2$ точку ∞, превратив его в сферу S^2. Нетрудно видеть, что если ε достаточно мало, $\Gamma(a, b) \neq 0$ при $(a, b) \in \partial C_\varepsilon$. Таким образом можно вычислить индекс пересечения $\langle \Gamma_*[C_\varepsilon], 0 - \infty \rangle$; из сказанного выше следует, что он равен $\sum_{i=1}^N \varepsilon(d_i)$.

Пусть теперь $0 - \infty = \partial \ell$; цикл ℓ можно реализовать дугой, соединяющей 0 и ∞ (с точки зрения $\mathbb{R}^2$ — лучом с началом 0). Тогда $\langle \Gamma_*[C_\varepsilon], 0 - \infty \rangle = \langle \Gamma_*[C_\varepsilon], \partial \ell \rangle = \langle \partial \Gamma_*[C_\varepsilon], \ell \rangle = \langle \Gamma_*[\partial C_\varepsilon], \ell \rangle = \langle \Gamma_*[S_1 + S_2 + S_3], \ell \rangle$. Нетрудно видеть, что если ε достаточно мало, то образ $\Gamma(\partial C_\varepsilon)$ и луч ℓ пересекаются трансверсально, по крайней мере после малого шевеления луча ℓ. Алгебраическое число точек пересечения ℓ с $\Gamma(S_3)$ равно, как нетрудно видеть, $\mathrm{w}(\gamma)$, с $\Gamma(S_1)$ равно $\mathrm{ind}(\gamma, p_1)$, а с $\Gamma(S_2)$ равно $\mathrm{ind}(\gamma, p_2)$. □

Пусть теперь K и A — связные замкнутые ориентированные непересекающиеся подмногообразия в S^n. Пусть $a \notin K \cup A$; отождествим $S^n \setminus \{a\}$ с $\mathbb{R}^n$. Определим отображение $f : K \times A \to S^{n-1}$, сопоставив паре точек $x \in K \subset \mathbb{R}^n$. $y \in A \subset \mathbb{R}^n$ вектор $(y - x)/|y - x|$.

Теорема 2. *Степень отображения f равна $\mathrm{lk}([K], [A])$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что K и A находятся в общем положении. Пусть Ξ — компактное многообразие к краем и $\iota : \Xi \to \mathbb{R}^n$ — отображение, ограничение которого на край $\partial\Xi$ — гомеоморфизм края на K.

Рассмотрим $F : \Xi \times A \to \mathbb{R}^n \subset S^n$, сопоставляющее паре точек $x \in \Xi$, $y \in A$ вектор $\iota(y) - x$. Из сказанного выше следует, что $\mathrm{lk}([K], [A]) = \langle F_*([\Xi \times A]), 0 -$

$a\rangle$ (где $0 \in \mathbb{R}^n$ — начало координат, а $a \in S^n$ — выколотая "бесконечность"). 0-мерный цикл $0 - a$ является границей цепи ℓ, представленной в S^n дугой, соединяющей 0 и a (а в $\mathbb{R}^n$ — лучом, идущим из начала координат). Тогда $\mathrm{lk}([K],[A]) = \langle F_*([\Xi \times A]), \partial\ell\rangle = \langle \partial F_*([\Xi \times A]), \ell\rangle = \langle F_*([K \times A]), \ell\rangle$. Согласно теореме о равенстве степени отображения алгебраическому числу прообразов, получим, что последний индекс пересечения равен степени отображения f. $\square$