ТЕОРЕМА БРАУЭРА

Символом D^k обозначим k-мерный шар единичного радиуса в $\mathbb{R}^k$ с центром в начале координат.

Задача 1. Пусть $f : D^{n+1} \to D^{n+1}$ — непрерывное отображение, не имеющее неподвижных точек на границе шара. Обозначим $g : S^n \to S^n$ *гауссово отображение*, заданное формулой $g(x) = (x - f(x))/\left|x - f(x)\right|$, где $x \in S^n = \partial D^{n+1}$. Докажите, что отображение g имеет степень 1 (т.е. гомотопно тождественному).

Задача 2. Выведите из результата задачи 1 теорему Брауэра: всякое непрерывное отображение шара в себя имеет неподвижную точку.

Пусть $Y \subset X$. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется ретракцией, если $f(y) = y$ для всякого $y \in Y$.

Задача 3. Докажите, что не существует ретракции шара на его граничную сферу.

Задача 4. Пусть $f : S^n \to S^n$ и $g : S^n \to S^n$ — два непрерывных отображения сфер степеней k и l соответственно. Докажите, что композиция $g \circ f : S^n \to S^n$ имеет степень kl.

Указание. Два отображения сферы гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень.

Задача 5. Пусть $S^n = \partial D^{n+1}$. Докажите, что а) отображение $f : S^n \to S^n$, заданное формулой $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (-x_0, x_1, \ldots, x_n)$, имеет степень -1; б) отображение $f_k : S^n \to S^n$, заданное формулой $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (-x_0, -x_1, \ldots, -x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, имеет степень $(-1)^{k+1}$.

Отображение $A : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ называется касательным векторным полем на сфере, если для всякого $x \in S^n$ вектор $A(x)$ касается сферы в точке x (т.е. перпендикулярен вектору x).

Задача 6. Выведите из результата задачи 5, что если A — касательное векторное поле на сфере S^n, где n четно, то обязательно найдется точка $x \in S^n$, для которой $A(x) = 0$. Докажите, что на сфере нечетной размерности найдется касательное векторное поле без нулевых точек.

Задача 7. Докажите, что всякое непрерывное отображение сферы четной размерности в себя имеет либо неподвижную точку, либо точку, которая переходит в диаметрально противоположную. Приведите контрпример к этому утверждению для сферы произвольной нечетной размерности.

Задача 8. Используя результат задачи 7, докажите, что линейный оператор в пространстве произвольной нечетной размерности имеет по крайней мере одно вещественное собственное значение.

Задача 9. Верна ли теорема Брауэра для сфер с дырками ?

Задача 10. Каким минимальным количеством образуюших можно породить группу а) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, б) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, в) $\mathbb{Z}^3$, г) $\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2$, д) произвольную конечно порожденную абелеву группу ?