ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Задача 1. а) Докажите, что $H_0(X)$ — свободная абелева группа, порожденная множеством компонент линейной связности пространства X. б) Пусть X линейно связно. Докажите, что $H_0(X,Y)=0$ для произвольного $Y\neq\varnothing$.

Задача 2. Пусть S^1 — окружность, а $S^0\subset S^1$ — пара диаметрально противоположных точек. Опишите точную последовательность пары (S^1,S^0) (т.е. вычислите все входящие в нее гомологии и гомоморфизмы между ними).

Задача 3. Пусть S^2 — двумерная сфера, $S^1\subset S^2$ — экватор, а $S^0\subset S^1$ — пара диаметрально противоположных точек. Опишите точную последовательность тройки (S^2,S^1,S^0).

Задача 4. Определите для а) S^1, б) S^n, в) $\mathbb{R}P^2$, г) $\mathbb{T}^2$ симплициальное разбиение и вычислите гомологии соответствующего симплициального комплекса с коэффициентами в $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$.

В задачах $\mathcal{C}=0\to C_n\to\dots to C_0\to 0$ — комплекс конечномерных векторных пространств над полем F, $c_i=\dim C_i$ и $b_i=\dim H_i(\mathcal{C})$.

Задача 5. Докажите, что $\mathcal{C}$ раскладывается в прямую сумму одночленных комплексов вида $0\to F\to 0$) и двучленных точных последовательностей вида $0\to F\to F\to 0$ (средняя стрелка — изоморфизм).

Задача 6. Докажите, что эйлерова характеристика комплекса $\chi(\mathcal{C})=\sum_i(-1)^i c_i$ равна знакопеременной сумме размерностей его гомологий: $\chi(\mathcal{C})=\sum_i(-1)^i b_i$.

Задача 7. Доажите для каждого $k\geq 0$ неравенство а) $b_k\leq c_k$; б) $b_k-b_{k-1}+b_{k-2}-\dots\pm b_0\leq c_k-c_{k-1}+c_{k-2}-\dots\pm c_0$ (неравенство Морса).

Задача 8. а) Пусть $\alpha:\mathbb{Z}^k\to\mathbb{Z}^l$ – гомоморфизм. Докажите, что его ядро $\mathrm{Ker}\,\alpha$ выделяется прямым слагаемым: $\mathbb{Z}^k=\mathrm{Ker}\,\alpha\oplus B$, для некоторой свободной абелевой группы B. Верно ли соответствующее утверждение для образа ? б) Докажите, что комплекс конечно порожденных абелевых групп раскладывается в прямую сумму одночленных и двучленных (каких?) комплексов.