ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ МАЙЕРА–ВИЕТОРИСА

Если формулировка задачи является утверждением, то это утверждение нужно доказать.

Пусть X — клеточное пространство, и A, B, K — его клеточные подпространства в одном и том же клеточном разбиении.

Задача 1. Пусть $\overline{X \setminus A} \subset K$. Тогда имеет место изоморфизм $H_i(X, A) \cong H_i(K, K \cap A)$. Более точно, *гомоморфизм вырезания* $\iota_* : H_i(K, K \cap A) \to H_i(X, A)$, индуцированный включением $\iota : (K, K \cap A) \to (X, A)$, является изоморфизмом.

Задача 2. а) Если $A \cup B$ стягиваемо, то при $n \geq 1$ разность гомоморфизмов включений $\alpha = i_A - i_B : H_n(A \cap B) \to H_n(A) \oplus H_n(B)$ есть изоморфизм. б) Если $A \cap B$ стягиваемо, то при $n \geq 1$ сумма гомоморфизмов включений $\beta = I_A \oplus I_B : H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(A \cup B)$ есть изоморфизм. в) Композиции $H_n(A \cup B) \xrightarrow{j_*} H_n(A \cup B, A) \cong H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B)$ и $H_n(A \cup B) \xrightarrow{j_*} H_n(A \cup B, B) \cong H_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B)$ (в которых $\cong$ есть изоморфизм вырезания) совпадают с точностью до знака. г) Если A и B стягиваемы, то при $n \geq 1$ каждый гомоморфизм из в) есть изоморфизм $H_n(A \cup B) \to H_{n-1}(A \cap B)$.

Указание. В пп. а) и б) рассмотрите точную гомологическую последовательность пары $(A \cup B, A \cap B)$. В п. г) рассмотрите случай, когда A и B — северное и южное полушарие сферы, пересекающиеся по экватору.

Задача 3. *Последовательность Майера–Виеториса* $\dots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{i_A - i_B} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{I_A \oplus I_B} H_n(A \cup B) \xrightarrow{\gamma} H_{n-1}(A \cap B) \to \dots$ точна. Здесь гомоморфизмы $i_A - i_B$, $I_A \oplus I_B$ и γ определены в задаче 2а), 2б) и 2в) соответственно. Эта последовательность является аналогом формулы включений-исключений.

Задача 4. Вычислите, используя последовательность Майера–Виеториса, гомологии а) сфер с ручками и пленками Мебиуса, б) $S^p \times S^q$, в*) пространства $T^2 \times I/(x, 0) \sim (f_A(x), 1)$, где f_A — линейный автоморфизм тора T^2, заданный матрицей A.