КЛЕТОЧНЫЕ ГОМОЛОГИИ

Задача 1. Вычислите для указанных ниже пространств их клеточные гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}_2$. В случае, если указана пара пространств, вычислите также относительные гомологии и точную последовательность пары.

1) S^1; 2) (S^n, S^{n-1}), где S^{n-1} — экватор; 3) сфера с g ручками; 4) $\mathbb{R}P^2$; 5) бутылка Клейна; 6) $\mathbb{R}P^2$ и бутылка Клейна с g ручками; 7) (S^2 с n дырками, объединение границ дырок); 8) (тор $\mathbb{T}^2$, меридиональная окружность S^1); 9) $(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})$, где $\mathbb{R}P^{n-1}$ стандартно вложено в $\mathbb{R}P^n$; 10) $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$; 11) (группа $\mathrm{SO}(3)$, все повороты на угол π).

Задача 2. Пусть (e_1, e_2, e_3, e_4) — стандартный базис в $\mathbb{R}^4$. Зафиксируем в множестве $\mathbb{R}G(2,4)$ двумерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^4$ следующие подмножества: $s_0 = \{\langle e_1, e_2\rangle\}$, $s_1 = \{V \subset \langle e_1, e_2, e_3\rangle, \langle e_1\rangle \subset V\}$, $s_2^{(1)} = \{V \subset \langle e_1, e_2, e_3\rangle\}$. $s_2^{(2)} = \{V \mid \langle e_1\rangle \subset V\}$, $s_3 = \{V \mid \dim(V \cap \langle e_1, e_2\rangle) = 1\}$.

1) Докажите, что множества s_0, $s_1 \setminus s_0$, $s_2^{(1)} \setminus s_1$, $s_2^{(2)} \setminus s_1$, $s_3 \setminus (s_2^{(1)} \cup s_2^{(2)})$. $\mathbb{R}G(2,4) \setminus s_3$ образуют клеточное разбиение пространства $\mathbb{R}G(2,4)$. 2) Вычислите гомологии $\mathbb{R}G(2,4)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$. 3) Вычислите точные последовательности пар $(\mathrm{sk}_{i+1}(\mathbb{R}G(2,4)), \mathrm{sk}_i(\mathbb{R}G(2,4)))$ для $i = 0,1,2,3$. 4) Проделайте вычисления, аналогичные пунктам 1 и 2, для множества $\mathbb{R}G_+(2,4)$ ориентированных двумерных подпространств в $\mathbb{R}^4$. 5) Докажите, что $\mathbb{R}G_+(2,4)$ гомеоморфно $S^2 \times S^2$, и опишите накрытие $S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}G(2,4)$, соответствующее естественному двулистному накрытию $\mathbb{R}G_+(2,4) \to \mathbb{R}G(2,4)$.