ГРАССМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированным базисом $e_1, \ldots, e_n$. Для произвольного подпространства $V \subset \mathbb{R}^n$ размерности k обозначим $a_s(V) = \dim V \cap \langle e_1, \ldots, e_s \rangle$.

Задача 1. Докажите следующие свойства последовательности a_s: а) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$; б) $1 - a_1 \leq 2 - a_2 \leq \cdots \leq n - a_n$.

Задача 2. Назовем индекс s *ведущим*, если $a_s(V) > a_{s-1}(V)$. Докажите, что в подпространстве V существует единственный базис $v_1, \ldots, v_k$ такой, что $v_i = e_{m_i} + f_i$, где m_i — i-й по величине ведущий индекс, а $f_i = \sum_t \alpha_t^{(i)} e_t$, где все индексы t меньше m_i, и среди них нет ведущих.

Задача 3. Обозначим $D(a_1, \ldots, a_n)$ множество подпространств $V \subset \mathbb{R}^n$ таких, что $a_i(V) = a_i \, \forall i$. Докажите, что множество $D(a_1, \ldots, a_n)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^m$, и найдите m. Опишите явно эти множества в случаях $k = 1$ ($\mathbb{R}P^{n-1}$). Проверьте, что для $n = 4$. $k = 2$ эти множества совпадают с множествами, описанными в задаче 2 листка “Клеточные разбиения”.

Задача 4. Для каких последовательностей $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ множество $D(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит замыканию множества $D(b_1, \ldots, b_n)$?

Множества $D(a_1, \ldots, a_n)$ образуют клеточное разбиение грассманова многообразия $G(n, k)$ и называются клетками Шуберта.

Задача 5. Опишите поведение множеств $D(a_1, \ldots, a_n)$ при естественных вложениях $G(n, k) \to G(n+1, k)$.

Задача 6. Постройте, исходя из результата задачи 5, клеточное разбиение бесконечномерного грассманиана $G(\infty, k)$.

Задача 7. Пусть $r_i^{(k)} = \dim H_{2i}(\mathbb{C}G(\infty, k))$. Докажите равенство (формальных рядов) $\sum_{i=0}^{\infty} r_i^{(k)} t^i = \frac{1}{1-t} \frac{1}{1-t^2} \cdots \frac{1}{1-t^k}$.