ВЫЧИСЛЕНИЕ ГОМОЛОГИЙ (ИТОГОВЫЕ ЗАДАЧИ ЗА ПЕРВУЮ ПОЛОВИНУ СЕМЕСТРА)

Задача 1. а) Вычислите гомологии бутылки Клейна. б) Постройте двулистное накрытие f бутылки Клейна двумерным тором. в) Вычислите отображение $f_* : H_i(\mathbb{T}^2) \to H_i(K)$ для всех i.

Задача 2. Постройте клеточное разбиение и вычислите гомологии пространства единичных касательных векторов а) к сфере S^2; б) к сфере с g ручками; в) к сфере S^n.

Задача 3. Пусть $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейный оператор с целыми коэффициентами (т.е. переводящий решетку $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ в себя), а $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ — соответствующее фактор-отображение ($\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$). Пространство $X_A \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{T}^2 \times [0,1])/\big((x,0) \sim (f_A(x),1)\big)$. Постройте клеточное разбиение пространства X_A и найдите его гомологии в случае а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Пусть $H : S^3 \to S^2$ — расслоение Хопфа, а $D_1, D_2 \subset S^2$ — два непересекающихся открытых круга. Вычислите гомологии пространства $H^{-1}(S^2 \setminus (D_1 \cup D_2))$.

Указание. Здесь можно использовать или клеточное разбиение, или последовательность Майера–Вьеториса.

Задача 5. Пусть $K \subset S^3$ — а) произвольный узел; б) произвольное зацепление из n компонент. Вычислите гомологии $S^3 \setminus K$.

Указание. А вот здесь лучше всего работает последовательность Майера–Вьеториса.

Задача 6. Пусть $f : \mathbb{R}P^3 \to \mathbb{R}$ — функция, заданная в однородных координатах формулой $f(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2)/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, где все $a_i > 0$. а) Найдите критические точки функции f. б) Вычислите гомологии пространства $M_{pq} = f^{-1}([p,q]) \subset \mathbb{R}P^3$ при всех p, q.