УМНОЖЕНИЯ

Задача 1. Вычислите кольца когомологий: а) $H^{\cdot}(\mathbb{C}P^n)$; б) $H^{\cdot}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$; в) $H^{\cdot}(S^p \times S^q)$; г) $H^{\cdot}(S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k})$; д) $H^{\cdot}$(сферы с g ручками).

Задача 2. Кривая γ_1 пересекает параллель тора 3 раза, а меридиан 5 раз; кривая γ_1 пересекает параллель 1 раза, а меридиан 6 раз (все пересечения трансверсальные). Докажите, что кривые γ_1 и γ_2 пересекаются.

Задача 3. Алгебраической гиперповерхностью степени d в $\mathbb{C}P^n$ называется множество, заданное в однородных координатах уравенением (естественно, однородным) степени d. Докажите, что алгебраическая поверхность общего положения представляет собой объединение нескольких гладких многообразий, пересекающихся трансверсально, и реализует класс гомологий dx, где x — образующая группы $H_{n-2}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$.

Задача 4 (теорема Безу)**.** Докажите, что система из n однородных алгебраических уравнений степеней $d_1, \ldots, d_n$ с $n+1$ комплексной неизвестной имеет ровно $d_1 \ldots d_n$ решений, считая с кратностями и с точностью до пропорциональности.

Указание. Рассмотрите сначала систему общего положения, когда все кратности равны 1.

Задача 5. Гладкие гиперповерхности $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на сфере S^n центрально симметричны и делят объем сферы пополам. Докажите, что они имеют общую точку.