КЛАСС ЭЙЛЕРА

Пусть $p : E \to S^2$ — двумерное ориентированное векторное расслоение, $P : S(E) \to S^2$ — его сферизация. Тривиализуем $S(E)$ над северным и над южным полушарием. Над каждой точкой b экватора эти две тривиализации различаются поворотом слоя на угол $\varphi(b)$; если степень отображения φ равна k, то расслоение p назовем $\mathcal{O}(k)$.

Задача 1. Вычислите k для а) тривиального расслоения; б) касательного расслоения к сфере; в*) расслоения над $\mathbb{C}P^1 = S^2$, слой которого над точкой $[a : b]$ равен $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid za^n + wb^n = 0\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2 (оправдывает обозначение $\mathcal{O}(k)$)**.** а) Докажите, что два расслоения указанного типа, для которого степень отображения φ одинакова, эквивалентны. б) Всякое ли расслоение над S^2 со слоем S^1 получается как сферизация векторного расслоения ?

Задача 3. Докажите, что класс Эйлера расслоения $\mathcal{O}(k)$ равен $k \in H^2(S^2) = \mathbb{Z}$.

Задача 4. Верно ли, что для всякого расслоения над S^4 со слоем $\mathbb{T}^3$ существует нетривиальное сечение ? А со слоем S^2 ?

Задача 5. Пусть $f_1, f_2 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ — две непересекающиеся гладкие кривые. Рассмотрим двумерное векторное расслоение V над $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, слой которого над точкой (s_1, s_2) это плоскость, перпендикулярная вектору $f_1(s_1) - f_2(s_2)$. а) Докажите, что при гомотопии кривых класс $e(V)$ не изменяется, если кривые в процессе гомотопии не пересекаются. б) Найдите $e(V)$, если кривые это две непересекающихся окружности, лежащие далеко друг от друга. в) Найдите $e(V)$, если кривые это две окружности, расположенные как соседние звенья цепи (или как два слоя расслоения Хопфа). г) Что происходит с классом $e(V)$, если в процессе гомотопии кривые пересекаются один раз и трансверсально (уточните, что это значит, кстати) ? д) Найдите класс $e(V)$ для двух произвольных кривых.

Задача 6. Докажите, что на ориентированном компактном многообразии M тогда и только тогда существует касательное векторное поле без нулей, когда $\chi(M) = 0$.

Пусть X — замкнутое ориентированное n-мерное многообразие, $Y \subset X$ — замкнутое ориентированное m-мерное подмногообразие, $\iota : Y \to X$ — вложение. Нормальным расслоением к Y называется фактор $\nu_X(Y) = T_X|_Y / T_Y$.

Задача 7. Пусть $\alpha \in H^{n-m}(X)$ — класс, двойственный по Пуанкаре классу $\iota_*[Y] \in H_m(X)$. Докажите, что класс $\iota^*\alpha \in H^{n-m}(Y)$ — класс Эйлера расслоения $\nu_X(Y)$. Докажите, что на ориентированном компактном подмногообразии в $\mathbb{R}^n$ всегда существует непрерывное поле нормалей.

Пусть $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ — кривая "восьмерка". Рассмотрим отображение $p = f \times f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^4$. Нормальным расслоением к такому (погруженному в $\mathbb{R}^4$) тору называется расслоение $\nu_{\mathbb{R}^4}(p) = p^* T_{\mathbb{R}^4} / T_{\mathbb{T}^2}$.

Задача 8. Докажите, что $e(\nu_{\mathbb{R}^4}(p)) = 2 \in H^2(\mathbb{T}^2)$.