РАССЛОЕНИЯ

Задача 1. Выпишите тривиализации и функции перехода следующих расслоений: 1) тавтологического расслоения $\tau_{3,1}$ на $G(3,1) = \mathbb{R}P^2$; 2) тавтологического расслоения $\tau_{n+1,1}$ на $G(n+1,1) = \mathbb{R}P^n$; 3) тензорной степени $\tau_{n+1,1}^{\otimes k}$; 4) расслоения Хопфа $p : S^3 \to \mathbb{C}P^1$, $p(z,w) = [z : w]$; 5) касательного и кокасательного расслоения к сфере S^2; 6) касательного расслоения к произвольному многообразию M, на котором задан атлас.

Пусть H — подгруппа группы G. Если G-расслоение $p : E \to B$ эквивалентно некоторому H-расслоению, то говорят, что стуктурная группа расслоения $p : E \to B$ редуцируется к H. Например, тривиальным называется расслоение, структурная группа которого редуцируется к тривиальной группе; ориентируемым — векторное расслоение, группа $\mathrm{GL}(n)$ которого редуцируется к группе матриц с положительным определителем.

Задача 2. Докажите, что структурная группа произвольного n-мерного векторного расслоения редуцируется к $\mathrm{O}(n)$. Обобщение: если $H \subset G$ — деформационный ретракт, то группу G всегда можно редуцировать к H.

Задача 3. В группе $\mathrm{GL}(n)$ имеется естественная подгруппа D_k блочно-диагональных матриц, изоморфная $\mathrm{GL}(k) \times \mathrm{GL}(n-k)$. 1) Редуцируется ли группа касательного расслоения к сфере S^2 к группе D_1 ? 2) Тот же вопрос про касательное расслоение к S^n. 3) Редуцируется ли группа касательного расслоения к S^4 к D_2 ?

Задача 4. Докажите, что G-расслоения над сферой S^n классифицируются, с точностью до эквивалентности, классами гомотопии отображений $S^{n-1} \to G$.