Инварианты Громова–Виттена и квантовые когомологии

ЛЕКЦИЯ 1

Одним из самых интересных и важных вопросов классической алгебраической геометрии издавна считается вопрос о кривых различного рода (в частности, рациональных) на алгебраических многообразиях. Однако до недавнего времени не было систематического подхода к его решению.

Новую жизнь в него вдохнула относительно недавно появившаяся наука — зеркальная симметрия. Пришедшая из физики, она очень быстро стала достоянием математики. Ей стали заниматься такие известные люди, как Л. Борисов, А. Гивенталь, В. Голышев, Н. Громов, Б. Дубровин, М. Концевич, Ю. Манин, В. Никулин, Д. Орлов, А. Тюрин, B. Siebert, C. Vafa, D. Morrison, E. Witten, S-T. Yau и многие другие.

Для начала дадим "грубое" геометрическое определение инвариантов Громова–Виттена.

Определение 1. Пусть X — алгебраическое многообразие, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — циклы на нем. *Примарным n-точечным инвариантом (коррелятором) Громова–Виттена рода g, соответствующим классу гомологий $\beta \in H_2(X)$*, называется число, равное количеству кривых рода g, пересекающих общих представителей классов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, если оно конечно, и нулю в противном случае. При этом кривые, пересекающие цикл в разных точках, считаются *разными*. Это число обозначается как $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle_\beta^g$.

Замечание 2. В дальнейшем, пока мы не определим инварианты Громова–Виттена в общем случае, мы будем опускать слово "примарные". Кроме того мы будем одинаково обозначать циклы и двойственные к ним классы когомологий.

Пример 3. Как известно, на многообразиях Фано всегда есть рациональные кривые (в частности, это кривые, лежащие на экстремальных лучах конуса Мори). Более того, на гладком проективном многообразии Фано X через каждую точку проходит рациональная кривая D, такая, что

$$D \cdot (-K_X) \leqslant 1 + \dim X.$$

Доказательство этого факта непросто; единственное известное на данный момент использует редукцию в характеристику p.

Поэтому среди инвариантов рода ноль для многообразий Фано есть ненулевые (какие?).

На гладких трехмерных многообразиях Фано индекса 1 прямые (относительно антиканонического вложения) заметают поверхность (так называемую поверхность Фано). Поэтому если l — класс прямой на таком многообразии X, а $H = -K_X$, то единственные ненулевые инварианты рода ноль для l — это инварианты типа $\langle H^2, H, \ldots, H \rangle_l^0$; число $\langle H^2 \rangle_l^0$ равно степени поверхности Фано. На многообразиях большего индекса прямых "больше". Например, несложно убедиться, что на общей кубике в $\mathbb{P}^4$ через общую точку проходит шесть прямых. Это значит, что относительно обычного вложения этой кубики во введенных выше обозначениях $\langle H^3 \rangle_l^0 = 6$.

Вообще, знаменитая теорема Шокурова о существовании прямой на трехмерном многообразии Фано индекса 1 легла в основу классификации Исковских многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$.

Вопрос о рациональных кривых на многообразиях является центральным в программе Мори. Например, рациональные кривые заметают исключительные сечения стягиваний и расслоений Мори. Именно поиск таких кривых занимает центральное место в этой программе; до появления теоремы о конусе деформация кривых с отщеплением рациональных компонент была единственным подходом в этой теории.

В качестве примера можно рассмотреть следующее предложение.

Предложение 4. *Для трехмерного (и n-мерного по модулю программы Мори) многообразия с "хорошими" (например, терминальными) особенностями унилинейчатость (то есть то, что через общую точку проходит рациональная кривая) эквивалентна тому, что кодаирова размерность такого многообразия равна $-\infty$.*

Упражнение 5 (для тех, кто знаком с программой Мори). *Докажите (по модулю программы Мори), что многообразие с кодаировой размерностью $-\infty$ унилинейчато.*

Пример 6. Рассмотрим проективное многообразие Калаби–Яу X размерности n и степени k. Рассмотрим сечение этого многообразия линейным пространством коразмерности $n-1$; пусть H — гиперплоское сечение. Тогда, по формуле присоединения, канонический класс получившейся кривой C равен $(n-1)H$. Количество точек такого дивизора равно $(n-1)H\cdot[C] = (n-1)H\cdot H^{n-1}\cdot[X] = (n-1)\cdot k$. Если g — род кривой C, то количество точек канонического дивизора равно $2g-2$. Итак, $2g-2 = k\cdot(n-1)$ и $g = k\cdot(n-1)/2+1$. Значит, какой-то инвариант Громова–Виттена рода $k\cdot(n-1)/2+1$ не равен нулю.

Предложение 7. *Пусть X — абелево многообразие. Тогда все его инварианты Громова–Виттена рода ноль равны нулю.*

Доказательство. Действительно, это эквивалентно тому, что на многообразии X нет рациональных кривых. Пусть $C\subset X$ — рациональная кривая, t — локальная координата на ней. Распространим 1–форму dt на всю кривую с помощью групповой операции. Тогда мы получим всюду определенную дифференциальную форму на рациональной кривой. Противоречие. □

Пример 8. На очень общей[1] поверхности в $\mathbb{P}^3$ степени пять и больше нет рациональных и эллиптических кривых. Это значит, что инварианты Громова–Виттена рода ноль и один для таких поверхностей равны нулю.

Более того, верен следующий факт: любое подмногообразие очень общей гиперповерхности степени $2n$ или больше в $\mathbb{P}^n$ является многообразием общего типа. Отсюда, в частности, следует, что на такой гиперповерхности не лежит рациональных и эллиптических кривых.

Упражнение 9. *Приведите пример семейства гладких многообразий максимальной кодаировой размерности, на каждом из которых лежит бесконечное число рациональных кривых.*

Вопрос о рациональных кривых на многообразиях подчинен общему принципу: чем "более общего" типа многообразие, тем "меньше" на нем рациональных кривых. Это обуславливается, в частности, тем, что на таких многообразиях существует

[1] То есть на поверхности, соответствующей точке дополнения к счетному числу подмногообразий в пространстве модулей.

“достаточно много” дифференциальных 1-форм, чтобы найти такую, которая ненулевым образом ограничивается на рациональную кривую, так что получится, что если такая кривая существует, то на ней есть всюду определенная дифференциальная форма, чего быть не может. Однако чем больше род кривой, тем больше таких кривых на многообразиях.

В связи с вышесказанным представляют интерес не только заметно более легко считающиеся и представляющие геометрический интерес инварианты Громова–Виттена рода ноль, но и инварианты большего рода.

Замечание 10. В дальнейшем, если это не оговорено особо, мы будем рассматривать инварианты *рода ноль*, то есть соответствующие рациональным кривым, и обозначать их просто $\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_n\rangle_\beta$.

Кроме того, мы будем рассматривать инварианты Громова–Виттена только для гладких многообразий с неотрицательным антиканоническим классом (причины этого мы поймем чуть позже). Стандартной моделью для многообразий Фано будет считаться *антиканоническая*; термины “прямые”, “коники” и т. д. будут употребляться относительно именно этого вложения.

Инварианты Громова–Виттена обладают некоторыми свойствами, напрямую следующими из их определения. В дальнейшем, когда будем давать аксиоматическое определение инвариантов, мы возьмем эти свойства за *аксиомы*.

Рассмотрим три самых очевидных свойства. Пусть X — гладкое многообразие.

- Аксиома дивизора.

  Пусть $\gamma_1\in H_{\dim X-2}(X)$ — дивизор, $n\geqslant 3$. Тогда
  $$\langle\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n\rangle_\beta=(\gamma_1\cdot\beta)\langle\gamma_2,\ldots,\gamma_n\rangle_\beta,$$
  за исключением случая $\beta=0$ и $n=3$. В этом случае $\langle\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\rangle_0=\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot[X]$.
- Аксиома фундаментального класса.

  Пусть $\mathbf{1}$ — фундаментальный класс X.

  Определение 11. Инвариант Громова–Виттена называется *базовым*, если он имеет вид
  $$\langle\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\rangle_\beta,\quad \langle\gamma\rangle_\beta^1,\ \textit{или}\ \langle\mathbf{1}\rangle_\beta^g,\ g\geqslant 2.$$
  В противном случае инвариант называется *новым*.

  Пусть $\langle\mathbf{1},\gamma_2,\ldots,\gamma_n\rangle_\beta$ — новый инвариант. Тогда
  $$\langle\mathbf{1},\gamma_2,\ldots,\gamma_n\rangle_\beta=\langle\gamma_2,\ldots,\gamma_n\rangle_\beta.$$
  Для базового класса имеем
  $$\begin{cases}\langle\mathbf{1},\gamma_2,\gamma_3\rangle_0=\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot[X] & \text{если } \beta=0,\\ 0 & \text{если } \beta\neq 0.\end{cases}$$
- Отображение в точку.

  Пусть $\beta=0$ и $g=0$. Тогда
  $$\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_n\rangle_\beta=\gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_n\cdot[X].$$

Одним из самых важных типов инвариантов Громова–Виттена являются *трехточечные* (то есть для $n=3$) корреляторы (все остальные инварианты через них выражаются). Их можно “паковать” в так называемое кольцо квантовых когомологий.

Определение 12. Рассмотрим конечно порожденную алгебру A над полем K; пусть $e_1, \ldots, e_m$ — ее базис как линейного пространства. Построим *деформированную алгебру* A_q следующим образом. Элементами A_q будут многочлены (или формальные ряды) от переменной $q = (q_1, \ldots, q_r)$ с коэффициентами из кольца A. Умножение будет задаваться равенствами

$$e_i \circ e_j = \sum_d a_d(e_i, e_j, e_k) e_k q^d,$$

где $a_d(e_i, e_j, e_k) \in K$ — некоторые коэффициенты; умножение произвольных элементов A_q задается с помощью этих равенств по мультипликативности.

Замечание 13. Разумеется, коэффициенты $a_d(e_i, e_j, e_k)$ могут быть не любыми. Во-первых, ясно, что для того, чтобы произведение двух элементов кольца было конечным, надо, чтобы при больших d коэффициенты $a_d(e_i, e_j, e_k)$ были равны нулю. Во-вторых, на них нужно наложить некоторые соотношения; это необходимо для того, чтобы алгебра A_q была ассоциативной. Наука, которая изучает подобные деформированные алгебры, называется *деформационным квантованием.*

Выражение "деформированная алгебра" не случайно. Действительно, если положить $q = 0$, то мы получим исходную алгебру.

Определение 14. *Кольцом квантовых когомологий* $QH(X)$ многообразия X называется деформация кольца когомологий $H(X)$, в котором переменная $q = (q_1, \ldots, q_r)$ задается базисом $q_1, \ldots, q_r$ кольца $H_2(X)$, а в качестве структурных коэффициентов взяты трехточечные инварианты Громова–Виттена: $a_d(\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k) = \langle \gamma_i, \gamma_j, \hat{\gamma}_k \rangle_\beta$, где $\beta = \sum d_i q_i$.

Замечание 15. То, что трехточечные инварианты удовлетворяют соотношениям ассоциативности (то есть так называемым WDVV–уравнениям) — сложная теорема.

Таким образом, знание трехточечных корреляторов эквивалентно знанию кольца квантовых когомологий. Заметим также, что по аксиоме дивизора мы можем представить одно- и двухточечные инварианты как частный случай трехточечных; в кольце квантовых когомологий они будут соответствовать разложению произведения двух дивизоров и умножения на дивизор соответственно.