Инварианты Громова–Виттена и квантовые когомологии

ЛЕКЦИИ 2, 3 и 4

На этих лекциях мы изучим кольцо квантовых когомологий грассманианов.

Для описания этого кольца нам понадобится следующая замечательная теорема.

Теорема 1 (Siebert, Tian). *Пусть кольцо когомологий многообразия X имеет вид*

$$H^*(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[Z_1, \ldots, Z_k]/\langle R_1, \ldots, R_l\rangle,$$

где $Z_1, \ldots, Z_k$ — образующие, а $R_1, \ldots, R_l$ — соотношения. Тогда кольцо квантовых когомологий X равно

$$H^*(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[Z_1, \ldots, Z_k, q]/\langle R_1^*, \ldots, R_l^*\rangle,$$

где $R_1^*, \ldots, R_l^*$ — те же самые соотношения, но вычисленные с помощью квантового умножения.

В качестве примера непосредственно найдем кольцо квантовых когомологий проективного пространства.

Пример 2. Кольцо когомологий $\mathbb{P}^n$ порождено классами H^i, где $H = c_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ — класс, двойственный гиперплоскости. Ясно, что единственный ненулевой инвариант Громова–Виттена вида $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,, H\rangle_\beta$ — это $\langle H^n, H^n, H\rangle_l = 1$, где $l = H^{n-1}$ — класс прямой. Действительно, по аксиоме дивизора такой инвариант пропорционален двухточечному. И для того, чтобы кривых, пересекающих два цикла, было конечное число, необходимо, чтобы эти циклы были двумя точками, а кривая — прямой; тогда соответствующий инвариант равен 1.

Кольцо когомологий $\mathbb{P}^n$ равно $\mathbb{Z}[H]/H^{n+1}$. Как мы убедились, $H^i \circ H = H^{i+1}$, если $i < n$. Значит, $H^{\circ(n-1)} = H^{n-1}$. Далее, $H^n \circ H = 0 + 1 \cdot q$. Отсюда

$$QH(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H, q]/\langle H^{\circ(n+1)} - q\rangle.$$

Для начала напомним, как описывается кольцо когомологий грассманиана.

Пусть $E = \mathbb{C}^n$, грассманиан $G = G(l, E)$ — многообразие l-мерных подпространств в E и $k = n - l$. Зафиксируем полный флаг $F_\bullet = \{\mathrm{pt} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n = E\}$. Рассмотрим *разбиение* $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_l \geqslant 0)$, $\lambda_1 \leqslant k$.

Определение 3. *Циклом (клеткой) Шуберта на G относительно флага $F_\bullet$* называется многообразие

$$\Omega_\lambda(F_\bullet) = \{V \in G |\dim(V \cap F_{k+i-\lambda_i}) \geqslant i\ \forall\ 1 \leqslant i \leqslant l\}.$$

Комплексной коразмерностью цикла Шуберта является *вес его разбиения* $|\lambda| = \sum \lambda_i$. *Циклом (клеткой) Шуберта* Ω_λ называется когомологический класс цикла $\Omega_\lambda(F_\bullet)$ относительно произвольного флага $F_\bullet$.

Замечание 4. Легко видеть, что этот класс не зависит от выбора флага (так как любой флаг можно перевести в любой другой действием $GL_n(E)$), так что определение корректно.

Циклы Шуберта образуют клеточное разбиение грассманиана; более того, они образуют свободный базис (как линейного пространства) его группы когомологий.

Пусть $\hat{\lambda} = (k - \lambda_l, \ldots, k - \lambda_1)$. Цикл $\Omega_{\hat{\lambda}}$ называется циклом, *двойственным к* Ω_λ. Это название обусловлено тем, что $\Omega_\lambda \cdot \Omega_\mu = \delta^{\lambda}_{\hat{\mu}} \cdot [\mathrm{pt}]$.

Циклы Шуберта принято нумеровать *диаграммами Юнга* размером $l \times k$, соответствующими их разбиениям.

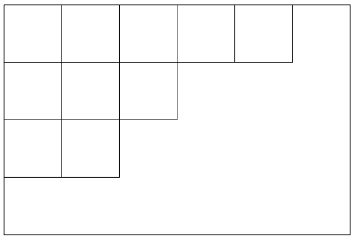

FIGURE 1. Диаграмма Юнга для разбиения (5,3,2,0) на G(4,10)

В такой интерпретации двойственный цикл имеет в качестве диаграммы *дополнение* к диаграмме исходного цикла.

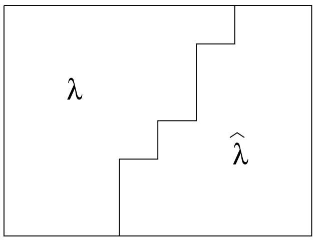

FIGURE 2. Диаграмма Юнга для разбиения $\hat{\lambda}$, двойственного к разбиению λ

Произведение циклов Шуберта в общем виде задается как

$$\Omega_\gamma \cdot \Omega\mu = \sum \langle \lambda, \mu, \hat{\nu} \rangle_0 \Omega_\nu.$$

Коэффициенты $\langle \lambda, \mu, \hat{\nu} \rangle_0$ — это количество точек пересечения Ω_λ, Ω_μ и $\Omega_{\hat{\nu}}$ (это непосредственно проверяется домножением на $\Omega_{\hat{\nu}}$). То есть, по аксиоме отображения в точку, это просто инварианты Громова–Виттена для класса точки для соответствующих многообразий.

Можно проверить, что кольцо когомологий грассманиана можно задать следующим образом.

Пусть S — тавтологическое расслоение, а Q — тавтологическое факторрасслоение. Несложно убедиться, что

$$\sigma_i := \Omega_{(i)} = c_i(Q).$$

Перейдя к двойственному грассманиану, получим

$$c_i := \Omega_{(1)^i} = c_i(S^*).$$

Упражнение 5. *Проверьте это.*

Классы σ_i называются *специальными классами Шуберта.* Для умножения на них используется *формула Пьери*

$$\Omega_\lambda \cdot \sigma_p = \sum \Omega_\mu,$$

где $|\mu| = |\lambda| + p$ и $k \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \ldots \geqslant \mu_l \geqslant \lambda_l$. В терминах диаграмм Юнга эта формула интерпретируется следующим образом: чтобы умножить клетку Шуберта на специальный класс σ_p, надо в ее диаграмму добавить p клеток так, чтобы никакие две из них не попали в один столбец.

Для умножения же произвольных классов пользуются их разложением по специальным классам с помощью следующей *формулы Джамбелли.* Положим (формально) $\sigma_i := 0$ для $i < 0$ или $i > k$. Тогда

$$\Omega_\lambda = \det(\sigma_{\lambda_i+j-i})_{1\leqslant i,j\leqslant l}.$$

Так как ранг S^* равен l, то при $l < i \leqslant n$ имеем

$$c_i = \det(1 + i - j)_{1\leqslant i,j\leqslant l} = 0. \qquad (\bigstar)$$

Задача 6. *Докажите, что это единственные соотношения в кольце когомологий грассманиана.*

Таким образом, имеем

$$H^*(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_k]/\langle c_{l+1}, \ldots, c_n\rangle. \qquad (\bullet)$$

Для того, чтобы найти, как соотношения $(\bigstar)$ записываются относительно квантового умножения, мы докажем квантовый аналог формулы Пьери.

Для начала зафиксируем обозначения. Так как $H_2(G, \mathbb{Z})$ порождено классом $\Omega_{(k)^{l-1},k-1}$, то класс кривой β на G определяется ее *степенью* $\deg\beta = \beta \cdot \Omega_1$ в плюккеровом вложении (Ω_1 — класс гиперплоскости в нем). Поэтому мы будем писать

$$\langle\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\rangle_{\deg\beta} := \langle\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\rangle_\beta.$$

Назовем *степенью отображения* $f : \mathbb{P}^1 \to G$ степень его образа (другими словами, $\deg f = \deg f^*\Omega_1$). Мы будем отождествлять кривую на грассманиане с таким отображением (единственным с точностью до автоморфизмов кривой). Кроме того, обозначим $\sigma_\lambda := \Omega_\lambda \otimes 1$. Для удобства квантовое умножение будем обозначать просто "$\cdot$".

Теорема 7 (Квантовая формула Пьери, Бертрам). *Если λ содержится в прямоугольнике $l \times k$, а $p \leqslant k$, то*

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_p = \sum \sigma_\mu + q \sum \sigma_\nu,$$

где суммы берутся по всем μ, таким, что $|\mu| = |\lambda| + p$ и $k \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \ldots \geqslant \mu_l \geqslant \lambda_l$, и по всем ν, таким, что $|\nu| = |\lambda| + p - n$ и $\lambda_1 - 1 \geqslant \nu_1 \geqslant \lambda_2 - 1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_l - 1 \geqslant \nu_l \geqslant 0$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся две следующие леммы.

Определение 8. Пусть $Y \subset G(l, E)$ — подмногообразие грассманиана. *Ядром* Y называется пересечение линейных пространств в E, соответствующих точкам Y. *Линейной оболочкой* Y называется минимальное линейное пространство в E, содержащее все линейные пространства, соответствующие точкам Y.

Лемма 9. *Пусть C — рациональная кривая степени d на G. Тогда ядро C имеет размерность не меньше $l-d$, а линейная оболочка имеет размерность не больше $l+d$.*

Доказательство. Пусть C — образ отображения $f:\mathbb{P}^1\to G$ степени d. Тогда обратный образ тавтологического расслоения равен $f^*S=\bigoplus_{i=1}^l\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i)$ для некоторых коэффициентов $a_i\geqslant 0$, таких, что $\sum a_i=d$, а f задается вложением $\bigoplus_{i=1}^l\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i)\subset E\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. Это значит, что точка p отображается в слой над p этого расслоения. В координатах это можно записать следующим образом. Если $(s:t)$ — координаты на $\mathbb{P}^1$, то базисом $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i))$ являются функции $\{s^jt^{a_i-j}\}_{0\leqslant j\leqslant a_i}$, так что отображения $O_{\mathbb{P}^1}(-a_i)\to E\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ в этом базисе задаются как

$$\sum_{j=0}^{a_j}\alpha_js^{-j}t^{j-a_i}\mapsto\sum_{j=0}^{a_j}v_j^{(i)}\otimes\alpha_j$$

для некоторых векторов $v_j^{(i)}$ (которые зависят от выбора изоморфизма f^*S и $\bigoplus_{i=1}^l\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i)$). Линейная оболочка C — это линейная оболочка множества $\{v_j^{(i)}\}$ размерности не больше $\sum(a_i+1)=l+d$. С другой стороны, по крайней мере $l-d$ из чисел a_i равны нулю, так что ядро C содержит линейное пространство, порожденное векторами $v_0^{(i)}$ и имеет размерность не меньше $l-d$.

$\square$

Замечание 10. Вообще, рациональные кривые степени d, участвующие в определении инвариантов Громова–Виттена, имеют ядро размерности *ровно* $l-d$ и линейную оболочку размерности *ровно* $l+d$.

Пусть λ — разбиение, а d — неотрицательное число. Тогда $\check{\lambda}$ будет обозначать разбиение, полученное удалением d левых колонок диаграммы Юнга для λ. Другими словами, $\check{\lambda}_i=\max(\lambda_i-d,0)$.

Лемма 11. *Пусть $C\subset G$ — рациональная кривая степени $d\leqslant k$. Пусть $W\subset E$ — линейное пространство размерности $l+d$, содержащее линейную оболочку C. Тогда если λ — такое разбиение, что $C\cap\Omega_\lambda(F_\bullet)\neq\emptyset$, то W лежит в клетке Шуберта $\Omega_{\check{\lambda}}(F_\bullet)$ в $G(l+d,E)$.*

Доказательство. Пусть $V\in C\cap\Omega_\lambda(F_\bullet)$. Тогда, так как $V\subset W$, то из условий в определении клеток Шуберта для V следует, что $\dim(W\cap F_{k+i-\lambda_i})\geqslant i$ для всех i. Это и есть определение того, что W лежит в $\Omega_{\check{\lambda}}(F_\bullet)$. $\square$

С помощью этих двух лемм мы докажем квантовую формулу Пьери.

Доказательство квантовой формулы Пьери. Первое слагаемое в правой части формулы — это правая часть обычной формулы Пьери. Для удобства мы переформулируем ее следующим образом. Пусть α и β — такие разбиения, что $|\alpha|+|\beta|+p=lk$. Тогда

$$\langle\Omega_\alpha,\Omega_\beta,\Omega_p\rangle_0=\begin{cases}1, & \text{если } \alpha_i+\beta_j\geqslant k \text{ для } i+j=l \text{ и } \alpha_i+\beta_j\leqslant k \text{ для } i+j=l+1,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Заметим, что кольцо квантовых когомологий грассманиана градуировано, причем степень q равна n. Это, в частности, значит, что для того, чтобы инвариант Громова–Виттена, отвечающий кривым степени d, не был равен нулю, необходимо, чтобы $|\alpha| + |\beta| + p = lk + dn$. Пусть C — кривая степени $d \geqslant 1$ на G, пересекающая $\Omega_\alpha(F_\bullet)$, $\Omega_\beta(G_\bullet)$ и $\Omega_p(H_\bullet)$ ($F_\bullet$, $G_\bullet$ и $H_\bullet$ — общие флаги). По лемме 9 существует подпространство $W \subset E$ размерности $l+d$, содержащее линейную оболочку C. По лемме 11 $W \subset \Omega_{\check\alpha} \cap \Omega_{\check\beta} \cap \Omega_{\check p}$, где $\check\alpha$ и $\check\beta$ получены удалением левых d колонок, а $\check p = \max(p-d, 0)$. Так как флаги выбраны общими, то $|\check\alpha| + |\check\beta| + \check p \leqslant (l+d)(k-d)$. Кроме того,

$$|\check\alpha| + |\check\beta| + \check p \geqslant |\alpha| + |\beta| - 2ld + p - d = (l+d)(k-d) + d^2 - d.$$

Поэтому $d = 1$ и $\alpha_l \geqslant 1$, $\beta_l \geqslant 1$. Таким образом, квантовая формула Пьери эквивалентна тому, что если $|\alpha| + |\beta| + p$, то

$$\langle \Omega_\alpha, \Omega_\beta, \Omega_p \rangle_1 = \begin{cases} 1 & \text{если } \alpha_i + \beta_j \geqslant k+1 \text{ для } i+j = l+1 \\ & \qquad \text{и } \alpha_i + \beta_j \leqslant k \text{ для } i+j = l+2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Другими словами, нам необходимо показать, что $\langle \Omega_\alpha, \Omega_\beta, \Omega_p \rangle_1 = \langle \Omega_{\check\alpha}, \Omega_{\check\beta}, \Omega_{\check p} \rangle_0$, где в правой части стоит коэффициент классической формулы Пьери в $G(l+1, E)$.

Если $\langle \Omega_{\check\alpha}, \Omega_{\check\beta}, \Omega_{\check p} \rangle_0 = 0$, то описанного выше W не существует, а, значит, не существует и кривой C, так что $\langle \Omega_\alpha, \Omega_\beta, \Omega_p \rangle_1 = 0$. С другой стороны, если $\langle \Omega_{\check\alpha}, \Omega_{\check\beta}, \Omega_{\check p} \rangle_0 = 1$, то существует единственное подпространство $W \subset X$ размерности $l+1$, содержащееся в $\Omega_{\check\alpha} \cap \Omega_{\check\beta} \cap \Omega_{\check p}$. Так как флаги общие, то W лежит во внутренности каждой клетки Шуберта. Другими словами, в их определении знаки $\geqslant$ можно заменить на $=$; в частности, это означает, что пространства $V_1 = W \cap F_{n-\alpha_l}$ и $V_2 = W \cap G_{n-\beta_l}$ имеют размерность l. Заметим, что $V_1 \in \Omega_\alpha(F_\bullet)$ и $V_2 \in \Omega_\beta(G_\bullet)$. Так как $\Omega_\alpha(F_\bullet)$ и $\Omega_\beta(G_\bullet)$ не пересекаются (по соображениям размерности), то $V_1 \neq V_2$, так что $S = V_1 \cap V_2$ имеет размерность $l-1$. Значит, единственная прямая, пересекающая клетки Шуберта для α, β и p — это прямая $\mathbb{P}(W/C)$, состоящая из l-мерных пространств между S и W (которая, очевидно, пересекает Ω_p). $\square$

Следствие 12. *Если $|\lambda| + p < n$, то $\sigma_\lambda \cdot \sigma_p = \Omega_\lambda \cdot \Omega_p$, то есть квантовое произведение в этом случае совпадает с обычным.*

И вот, наконец, все готово для описания кольца квантовых когомологий грассманиана.

Теорема 13. *Кольцо квантовых когомологий грассманиана $G = G(l, E)$, $E = \mathbb{C}^n$ представляется в виде*

$$QH^*(G) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_k, q] / \langle c_{l+1}, \ldots, c_{n-1}, c_n + (-1)^k q \rangle,$$

где $k = n - l$ и $c_\alpha = \det(\sigma_{1+j-i})_{1 \leqslant i,j \leqslant \alpha}$.

Доказательство. Воспользуемся представлением ($\bullet$). По теореме Зиберта–Тяна нам необходимо вычислить c_i с помощью квантового умножения. Для этого заметим, что, по следствию 12, в вычислении определителей c_α квантовое умножение будет совпадать с обычным для $\alpha < n$. Далее, для того, чтобы вычислить c_n, заметим, что $Q \otimes S = 1$ (напомним, что S — тавтологическое расслоение, а Q — тавтологическое факторрасслоение), так что $c_n(Q \otimes S) = 0$. В терминах клеток Шуберта это означает, что

$$c_n - \sigma_1 c_{n-1} + \ldots + (-1)^k \sigma_k c_l = 0.$$

Поэтому $c_n = (-1)^k \sigma_k c_l = (-1)^k \sigma_k \sigma_{(1)^l}$. По квантовой формуле Пьери получаем $\sigma_k \sigma_{(1)^l} = q$. $\square$

Упражнение 14. *Докажите* квантовую формулу Джамбелли*: если разбиение λ содержится в прямоугольнике $l \times k$, то $\sigma_\lambda = \det(\sigma_{\lambda_i+j-i})_{1\leqslant i,j\leqslant l}$ (ср. с классической формулой Джамбелли).*