Инварианты Громова–Виттена и квантовые когомологии

ЛЕКЦИИ 5 и 6

Цель этих лекций — дать слушателю представление о зеркальной симметрии. Для начала, однако, дадим новое определение инвариантов Громова–Виттена.

Определение 1. Пусть X — проективное алгебраическое многообразие. Пусть $M_n(X,\beta)$ — пространство отображений $f:\mathbb{P}^1_n\to X$, такое, что $f_*[\mathbb{P}^1_n]=\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})$ ($\mathbb{P}^1_n$ здесь означает проективную прямую с n отмеченными точками, а отображения берутся по модулю группы автоморфизмов). Построим компактификацию этого пространства следующим образом. Рассмотрим наборы $(f,C,\{p_i\})$, где C — кривая арифметического рода ноль (связная, но, возможно, приводимая) самое большее с простыми двойными точками в качестве особенностей, $\{p_i\}$ — различные гладкие точки на C, а $f:C\to X$ отображение, такое, что $f[C]=\beta$, а f имеет лишь конечную группу автоморфизмов (или, другими словами, на каждой стягиваемой компоненте C лежит как минимум три отмеченные или особые точки). Такие наборы называются *стабильными отображениями.* Мы будем отождествлять отображения $(f,C,\{p_i\})$ и $(f',C',\{p_i'\})$, если существует отображение $h:C\to C'$, такое, что $h(p_i)=p_i'$ и $f=f'\circ h$. *Пространством модулей отображений* рациональных кривых класса $\beta\in H_2(X)$ с n отмеченными точками $\bar{M}_n(X,\beta)$ называется множество таких наборов. Общей точкой этого стека является отображение $\mathbb{P}^1\to X$, на границе эти отображения вырождаются в отображения приводимых кривых.

Мы дадим определение инвариантов Громова–Виттена в терминах теории пересечений на стеках $\bar{M}_n(X,\beta)$, которую можно ввести благодаря тому, что локально они являются фактором гладкого многообразия по конечной группе. Однако эти стеки не всегда имеют ожидаемую размерность, и чтобы корректно оперировать с произведениями когомологических циклов на них, необходимо ввести *виртуальный фундаментальный класс* $[\bar{M}_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}$ виртуальной размерности $\operatorname{vdim}\bar{M}_n(X,\beta)=\dim X-\deg_{K_X}\beta+n-3$ (его конструкцию можно найти в книге Манина “Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей”, VI–1.1).

Определение 2. Рассмотрим отображения $ev_i:\bar{M}_n(X,\beta)\to X$, $ev_i(C;p_1,\dots,p_n,f)=f(p_i)$ и классы когомологий $\gamma_1,\dots,\gamma_n\in H^*(X)$. Пусть $\beta\in H_2(X)$. Тогда *примарный инвариант Громова–Виттена*, соответствующий этому набору, равен

$$\langle\gamma_1,\dots,\gamma_n\rangle_\beta:=ev_1^*(\gamma_1)\cdot\ldots\cdot ev_n^*(\gamma_n)\cdot[\bar{M}_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}},$$

если $\sum\operatorname{codim}\gamma_i=\operatorname{vdim}\bar{M}_n(X,\beta)$, и 0 иначе. (Мы будем его также обозначать как $I^X_\beta(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$.)

Это определение согласуется с “наивным” определением, данным нами в первой лекции. Используя его, можно показать, что трехточечные инварианты корректно задают кольцо квантовых когомологий.

Пространства $\bar{M}_n(X,\beta)$ построены для многих многообразий (по сути, его построение и есть определение инвариантов Громова–Виттена). Такое построение есть важная часть теории зеркальной симметрии. Новое определение более правильно, хотя оно кажется и менее общим, чем первое, так как только для определенных таким образом инвариантов можно построить кольцо квантовых когомологий. В последнее время деятельность многих ученых направлена на то, чтобы обобщить его на случай особых многообразий и стеков.

Определение 3. Рассмотрим многообразие X. Пусть $\{p_i\}_{i=1}^l$ — базис в $H^2(X, \mathbb{Z})$, а $q = (q_1, \ldots, q_l)$ — формальная переменная в кольце квантовых когомологий. Положим (формально) $q_i = e^{t_i}$ и рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial t_i} S = p_i \circ S, \quad i = 1, \ldots, l$$

на некоторую функцию $S(t_1, \ldots, t_l)$ со значениями в $H^*(X, \mathbb{C})$. Эти уравнения называется *дифференциальными уравнениями квантовых когомологий* или QH^*-*уравнениями.* Обычно вместо системы уравнений рассматривают одно, эквивалентное этой системе (как плоской связности в тривиальном расслоении).

Определение 4. Рассмотрим расслоение $Y \to Z$, дифференциальную форму ω на каждом слое, гладко зависящую от координат на базе, а также цикл γ на слое, непрерывно зависящий от базы. Рассмотрим функцию (возможно, многозначную)

$$\Phi = \int_\gamma \omega$$

в окрестности некоторой точки на базе. Она зависит от локальных координат $t_1, \ldots, t_l$ на базе. *Уравнением Пикара–Фукса* для этого расслоения называется дифференциальное уравнение (симметричное для мондромии), которому удовлетворяет такая функция. Обычно это уравнение пишут относительно дифференциального оператора $D = t\frac{d}{dt}$. Также говорят, что уравнение Пикара–Фукса сопоставляется не семейству, а одному соответствующему универсальному многообразию.

Гипотеза Зеркальной Симметрии 5 (частный вариант). *Дифференциальное уравнение квантовых когомологий для многообразия Калаби–Яу соответствует (в некотором смысле) уравнению Пикара–Фукса другого многообразия Калаби–Яу, и наоборот.*

Эта гипотеза позволяет интерпретировать симплектические свойства многообразия в терминах алгебро–геометрических свойств зеркального многообразия, и наоборот.

Теория зеркальной симметрии развивалась сначала для многообразий Калаби–Яу. Однако потом ее стали обобщать на больший класс многообразий, в частности, на многообразия Фано. Поэтому гипотезу Зеркальной Симметрии можно записать в более общем виде.

Гипотеза Зеркальной Симметрии 6 (обобщенный вариант). *Дифференциальное уравнение квантовых когомологий для некоторого класса многообразий соответствуют (в некотором смысле) уравнению Пикара–Фукса другого класса многообразий, и наоборот.*

Пример 7. Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^n$. Для него $H^2(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}H$. Разложив функцию S по степеням H как $S = S_0(t)H^n + S_1(t)H^{n-1} + \ldots + S_n(t)1$ и учитывая, что $H \circ H^i = H^{i+1}$, если $i < n$, и $H \circ H^n = q$, легко убедиться, что дифференциальное уравнение квантовых когомологий $\mathbb{P}^n$ сводится к уравнению

$$(\frac{d}{dt})^{n+1} S_0 = qS_0,$$

или $L_{HQ}\Phi = 0$, где $L_{HQ} = (d/dt)^n - e^t$. Его решением будет ряд

$$I^{\mathbb{P}^n} = \sum \frac{q^d}{(d!)^{n+1}},$$

определяющий, как мы позже увидим, кольцо квантовых когомологий $\mathbb{P}^n$. Этому уравнению соответствует уравнение $L_{PF}\Phi = 0$, где $L_{PF} = D^n - z$, а $D = z\frac{d}{dz}$.

Пример 8. Вообще, гиперповерхности $X_l \subset \mathbb{P}^n$ степени $l < n$ соответствует квантовое дифференциальное уравнение вида $L_{QH}\Phi = 0$, где

$$L_{QH} = (\frac{d}{dt})^n - e^t(\frac{d}{dt} + 1)\dots(\frac{d}{dt} + l - 1).$$

Его решением будет ряд

$$I^{X_l} = \sum \frac{(ld!)}{(d!)^{n+1}} q^d,$$

а соответствующее уравнение Пикара–Фукса будет иметь вид $L_{PF}\Phi = 0$, где

$$L_{PF} = (D)^n - lz(lD + 1)\dots(lD + l - 1),$$

а $D = z\frac{d}{dz}$.

Эти соотношения можно получить воспользовавшись квантовой теоремой Лефшеца.

Пример 9. Для гиперповерхностей индекса один уравнение Пикара–Фукса будет иметь такой же вид, как и для большего индекса, а квантовое дифференциальное уравнение будет выглядеть уже по-другому. Однако мы рассмотрим другой пример — трехмерную квинтику (то есть многообразие Калаби–Яу).

А именно, уравнение Пикара–Фукса, согласно рассмотренным уже примерам, будет иметь вид

$$(z\frac{d}{dz})^4 I(z) = 5z(5z\frac{d}{dz} + 1)\dots(5z\frac{d}{dz} + 4)I(z).$$

Это уравнение будет уравнением Пикара–Фукса в окрестности точки $z = 0$ для фундаментального цикла семейства многообразий

$$Y_z = \{(x_0, \dots, x_4) \in \mathbb{C}^5 | \prod_{i=0}^{4} x_i = z \text{и} \sum_{i=0}^{4} x_i = 1\}$$

и дифференциальной формы

$$\frac{\bigwedge_{i=0}^4 dx_i}{d(\prod_{i=0}^4 x_i) \wedge d(\sum_{i=0}^4 x_i)}.$$

Компактифицируем семейство Y_z и разрешим его особенности. Мы получим семейство гладких трехмерных многообразий Калаби–Яу, на которое можно распространить нашу 3-форму. Это семейство называется зеркальным для гладкой квинтики в $\mathbb{P}^4$.

Решением уравнения Пикара–Фукса (инвариантным относительно монодромии) будет ряд

$$I_0(z) = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(5d)!}{(d!)^5} z^d.$$

Рассмотрим ряд I_1, являющийся решением уравнения Пикара–Фукса вида $I_0 \log z + \psi(z)$, где $\psi(0) = 0$. Положим $q = \exp(\frac{I_1}{I_0})$. Тогда гипотеза Зеркальной Симметрии утверждает, что для квантового дифференциального уравнения

$$F(q) = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d d^3 \frac{q^d}{1-q^d}$$

(где n_d — число рациональных кривых степени d, лежащих на квинтике) выполнено равенство

$$F(q)(\frac{dq}{q})^3 = \frac{5}{(1-5^5 z) I_0^2(z)} (\frac{dz}{z})^3.$$

Таким образом можно по индукции найти числа n_d.

Последовательность примеров наглядно демонстрирует путь нарастания сложности зеркальной симметрии при уменьшении индекса гиперповерхности. Если в случае индекса два и больше дифференциальные уравнения зеркальной симметрии совпадают с уравнениями Пикара–Фукса для зеркального уравнения (с точностью до переобозначения переменной), то в случае индекса один приходится вводить дополнительный множитель, а для многообразий Калаби–Яу соответствие имеет довольно сложный вид.

Зеркальная симметрия — бурно развивающаяся и очень популярная в последнее десятилетие область науки.

Основными проблемами в ней являются следующие:

- Научиться находить зеркальные расслоения для многообразий. Какими свойствами они должны обладать?
- Определить инварианты Громова–Виттена для как можно большего класса объектов: особых многообразий, орбиобразий, стеков, семейств многообразий.
- Обобщить квантовую теорему Лефшеца (интерпретирующую инварианты Громова–Виттена гиперповерхности в терминах инвариантов объемлющего пространства) на случай сечений когерентных пучков.
- Доказать гипотезу Зеркальной Симметрии для как можно большего класса многообразий.

Гипотеза Зеркальной Симметрии имеет много разных формулировок. Мы намеренно не привели наиболее распространенную (с использованием так называемой категории Фукаи) так как она до сих пор не имеет четкой формулировки и более или менее стройной системы обоснованных утверждений.

Приведем некоторые из них.

Топологический вариант: Для n-мерного многообразия Калаби–Яу X существует такое n-мерное многообразие Калаби–Яу Y, что

$$h^{i,j}(X) = h^{n-i,j}(Y).$$

Вариант квантового гиперплоского сечения, теорема: Пусть $Y \subset X$ — полное пересечение. Тогда квантовое дифференциальное уравнение для Y получается из уравнения для X путем введения простого поправочного члена.