1. Пусть $V = \bigoplus\limits_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)\in\mathbb{Z}^k} V_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$ — конечномерное градуированное векторное пространство. Как связаны размерности однородных компонент этого пространства и его внешней алгебры? (Как и в следующей задаче, удобно вычислить сразу характер внешней алгебры, т. е. производящую функцию (от k переменных) размерностей однородных компонент.)

2. Докажите, что характер (производящая функция размерностей однородных компонент) пространства полубесконечных форм относительно двух его градуировок («заряд», «энергия») есть $\prod\limits_{k\geqslant 0}(1+tq^k)\prod\limits_{k\geqslant 1}(1+q^k/t)$.

3. Докажите, что характер пространства полубесконечных форм равен $\frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} t^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{\prod_{k\geqslant 1}(1-q^k)}$.

4. Докажите тождество Якоби:

$$\prod_{m\geqslant 0}(1-q^{2m+2})(1-q^{2m+1}t)(1-q^{2m+1}/t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k t^k q^{k^2}.$$

5. Обозначим $f(q) = \prod\limits_{i\geqslant 1}(1-q^i)$. Докажите тождества:

$$\text{(а) } f(q)^3 = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(2n+1)q^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad \text{(б) } \frac{f(q)^2}{f(q^2)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}, \quad \text{(в) } \frac{f(q^2)^2}{f(q)} = \sum_{n\geqslant 0} q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

6. (Чисто комбинаторное доказательство тождества Якоби)

(**а**) Докажите, что тождество Якоби эквивалентно тождеству

$$\frac{\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n z_1^{\frac{n^2-n}{2}} z_2^{\frac{n^2+n}{2}}}{\prod\limits_{k\geqslant 1}(1-z_1^k z_2^k)} = \prod_{k\geqslant 1}(1-z_1^k z_2^{k-1})(1-z_1^{k-1}z_2^k).$$

(**б**) Докажите, что векторы (p,q), которые можно представить в виде суммы нескольких *различных* векторов (x,y) с $|x-y|=1$, суть решения неравенства $p+q\geqslant(p-q)^2$. Проверьте, что это в точности векторы, имеющие вид $(m+\frac{n(n-1)}{2}, m+\frac{n(n+1)}{2})$, $m\geqslant 0$, $n\in\mathbb{Z}$.

(**в**) Пусть $a(m,n)$ — число представлений вектора $(m+\frac{n(n-1)}{2}, m+\frac{n(n+1)}{2})$ в виде суммы различных векторов (x,y) с $|x-y|=1$. Докажите, что $a(m,n)=a(m,n-1)$.

(**г**) Докажите, что $a(m,0)$ совпадает с числом разбиений числа m в неупорядоченную сумму (не обязательно различных) слагаемых.

(**д**) Докажите тождество Якоби.