Определим q-числа Фибоначчи e_n рекуррентным соотношением $e_{n+2} = e_{n+1} + q^{n+1}e_n$ и начальными условиями $e_0 = e_1 = 1$. Также нам потребуется их вариант d_n, заданный тем же рекуррентным соотношением и начальными условиями $d_0 = 0$, $d_1 = 1$.

1. Докажите, что если сопоставить подмножеству множества $\{1, \ldots, n-1\}$ «вес» — сумму его элементов, то производящая функция для подмножеств, не содержащих соседних чисел, относительно этого веса равна q-числу Фибоначчи e_n.

2. Докажите равенства:
(**а**) $e_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2} \binom{n-k}{k}_q$;
(**б**) $d_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k+1)} \binom{n-1-k}{k}_q$.

3. Докажите равенства:
(**а**) $e_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k+1)/2} \binom{n}{\lfloor (n-5k)/2 \rfloor}_q$;
(**б**) $d_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k(5k-3)/2} \binom{n}{\lfloor (n+2-5k)/2 \rfloor}_q$.

4. С помощью тождества Якоби для тройного произведения докажите, что при $n \to +\infty$ q-числа Фибоначчи имеют пределы

$$e_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5k+1})(1-q^{5k+4})} \text{ и } d_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5k+2})(1-q^{5k+3})}.$$

5. Выведите из предыдущих задач тождества Рождерса–Рамануджана

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)} == \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5k+1})(1-q^{5k+4})},$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)} == \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5k+2})(1-q^{5k+3})}.$$