1. Докажите тождество Сильвестра, обобщающее тождество Эйлера:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+tq^k) = \sum_{l=0}^{\infty} t^l q^{l(3l+1)/2}(1+tq^{2l+1}) \prod_{s=1}^{l} \frac{1+tq^s}{1-q^s}.$$

2. Для разбиения λ определим его ранг $r(\lambda)$ как разность между наибольшим слагаемым и числом слагаемых (числом столбцов и числом строк диаграммы Юнга).

(**а**) Докажите, что разбиений числа n с рангом не меньше r столько же, сколько разбиений этого же числа с рангом не больше $-r$.

Пусть λ — разбиение с $r(\lambda) \leqslant r+1$ $(\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k > 0)$. Определим новое разбиение $\psi_r(\lambda) = (k+r, \lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_k - 1)$.

(**б**) Докажите, что отображение ψ_r (отображение Дайсона) устанавливает биекцию между множеством разбиений числа n ранга не больше $r+1$ и множеством разбиений числа $n+r$ ранга не меньше $r-1$.

(**в**) Рассмотрим степенной ряд $f_r(q)$, в котором коэффициент при q^n $(n > 0)$ равен количеству разбиений числа n с рангом не меньше r. Выразите $f_{r-1}(q)$ через $f_{-1-r}(q)$.

(**г**) Докажите равенство $1 + f_r(q) + f_{1-r}(q) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}$.

(**д**) Докажите равенство

$$f_r(q) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} q^{n(3n-1)/2+rn}}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)}.$$

(**е**) Выведите из доказанного равенства тождество Эйлера.