Задачи по алгебре к 10 сентября 2004

1. При каких n уравнение $n = x^2 + y^2$ разрешимо в целых числах?

2. Пусть $\theta(n)$ — одна четверть числа целых решений уравнения $x^2 + y^2 = n$. Докажите, что $\theta(nm) = \theta(n)\theta(m)$, если m, n — взаимно простые натуральные числа.

3. Пусть $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ — разложение на простые сомножители. Найдите $\theta(n)$.

4. Пусть $\tau_1(n)$ (соотв. $\tau_3(n)$) — количество натуральных делителей n, имеющих вид $4k+1$ (соотв. $4k+3$). Выразите $\theta(n)$ через $\tau_1(n), \tau_3(n)$.

5. Пусть $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{3}) = \sqrt[3]{1}$. Верна ли основная теорема арифметики в кольце $\mathbf{Z}[\omega]$? А в кольце $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$? А в кольце $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$?

6. Пусть $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ — разложение на простые сомножители. Найдите число Эйлера $\phi(n)$ остатков по модулю n, взаимно простых с n.

7. Мультипликативная группа $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ кольца вычетов по модулю n имеет порядок $\phi(n)$. Найдите эту группу (например, $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* = \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$, а $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^* = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} + \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).