Задачи по алгебре к 1 декабря 2004

1. Разложить в прямую сумму циклических групп факторгруппу A/B, где A — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, а B — ее подргуппа, порожденная y_1, y_2, y_3:

a) $y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3,\ y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3$;

b) $y_1 = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3,\ y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3,\ y_3 = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3$;

c) $y_1 = 2x_1 + 6x_2 - 2x_3,\ y_2 = 2x_1 + 8x_2 - 4x_3,\ y_3 = 4x_1 + 12x_2 - 2x_3$.

2. Сколько подгрупп a) порядков 3 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 18; b) порядков 5 и 15 в нециклической абелевой группе порядка 75?

3. Пусть A — свободная абелева группа с базисом $x_1, \ldots, x_n$, а B — ее подгруппа с порождающими элементами $y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j,\ j = 1, \ldots, n$. Доказать, что факторгруппа A/B конечна тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) \neq 0$, и при этом $\sharp A/B = |\det(a_{ij})|$.

4. Найти жорданову форму матрицы:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix};\ b) \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix};\ c) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \ldots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \ldots & 2 \\ 0 & 0 & n & \ldots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix};\ e) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Решить уравнения a) $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; b) $X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

6. Вычислить a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$; b) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}^{64}$.

7. Найти жорданову форму следующих операторов: a) $A:\ f(x,y) \mapsto f(x+1, y+1)$ в 9-мерном пространстве комплексных многочленов степени не выше 2 по x и y; b) $B = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ в $\frac{n(n+1)}{2}$-мерном пространстве комплексных многочленов от x и y степени не выше $n-1$; c) $L_C(X) = CX$ в 4-мерном пространстве 2×2-матриц, где C — фиксированная 2×2-матрица известной жордановой формы.