Задачи по алгебре к 29 сентября 2004

1. Пусть векторы $e_1, \ldots, e_n, x$ заданы своими координатами в некотором базисе:

a) $e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (1,1,2),\ e_3 = (1,2,3),\ x = (6,9,14)$;

b) $e_1 = (2,1,-3),\ e_2 = (3,2,-5),\ e_3 = (1,-1,1),\ x = (6,2,-7)$;

c) $e_1 = (1,2,-1,-2),\ e_2 = (2,3,0,-1),\ e_3 = (1,2,1,4),\ e_4 = (1,3,-1,0), x = (7,14,-1,2)$.

Доказать, что $(e_1, \ldots, e_n)$ — также базис пространства, и найти координаты вектора x в этом базисе.

2. Доказать, что каждая из двух заданных систем векторов S, S' является базисом. Найти матрицу перехода от S к S': a) $S = \{(1,2,1),(2,3,3),(3,8,2)\},\ S' = \{(3,5,8),(5,14,13),(1,9,2)\}$;

b) $S = \{(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,3,2,3)\}$,

$S' = \{(1,0,3,3),(-2,-3,-5,-4),(2,2,5,4),(-2,-3,-4,-4)\}$.

3. Даны векторы $v_1 = (0,1,0,2,0), v_2 = (7,4,1,8,3), v_3 = (0,3,0,4,0), v_4 = (1,9,5,7,1), v_5 = (0,1,0,5,0)$. Существуют ли числа c_{ij} такие, что векторы $w_i = \sum_{j=1}^{5} c_{ij} v_j$ $(i = 1,2,3,4,5)$ линейно независимы?

4. Доказать, что всякий многочлен положительной степени с целыми коэффициентами имеет корень в поле $\mathbf{F}_p$ для бесконечного множества простых чисел p.

5. Пусть F — конечное поле. Доказать, что для всякого отображения $h :\ F \to F$ существует многочлен $f \in F[x]$ такой, что $h(a) = f(a)$ для любого $a \in F$.

6. Найти a) все неприводимые многочлены степени меньше 5 над полем $\mathbf{F}_2$;

b) все неприводимые многочлены степени 2 над полем $\mathbf{F}_3$;

c) число неприводимых многочленов степени 5 над полем $\mathbf{F}_2$;

d) число неприводимых многочленов степени 3,4 над полем $\mathbf{F}_3$;

e) число неприводимых многочленов степени 2,3 над полем $\mathbf{F}_9$.

7. Доказать, что при $a \in \mathbf{F}_p^*$ многочлен $x^p - x - a$

a) неприводим над $\mathbf{F}_p$;

b) неприводим над $\mathbf{F}_{p^n}$ тогда и только тогда, когда n не делится на p.

8*. Доказать, что $x^{2n} + x^n + 1$ неприводим над $\mathbf{F}_2$ тогда и только тогда, когда $n = 3^k$ для некоторого $k \geq 0$.

9*. Пусть I_m — число различных неприводимых многочленов степени m со старшим коэффициентом единица над конечным полем $\mathbf{F}_q$. Доказать, что в формальных рядах от z имеет место тождество $1 - qz = \prod_{m=1}^{\infty}(1 - z^m)^{I_m}$.