Задачи по алгебре к 6 октября 2004

1. Доказать неприводимость над полем рациональных чисел следующих многочленов:

a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

c) $x^{105} - 9$;

d) $(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) - 1$, где $a_1, \dots, a_n$ — различные целые числа;

e) $(x - a_1)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$, где $a_1, \dots, a_n$ — различные целые числа.

2. Континуанта $(a_1 a_2 \dots a_n)$ — это определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

a) Выразить $(a_1 a_2 \dots a_n)$ в виде многочлена от $a_1, \dots, a_n$;

b) Написать разложение континуанты по первым k строкам;

c) Доказать

$$\frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 \dots a_n)} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

3. Определитель Вандермонда $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — это

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

a) Вычислить $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ как многочлен от $x_1, \dots, x_n$;

b) Пусть $y_1, \dots, y_n$ — другой набор чисел, причем $x_i y_j \neq 1$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Доказать

$$\Delta(x_1, \dots, x_n)\Delta(y_1, \dots, y_n) \prod_{i,j=1}^{n} (1 - x_i y_j)^{-1} = \det\left(\frac{1}{1 - x_i y_j}\right)$$

4. Вычислить определитель матрицы (a_{ij}) порядка n, где

a) a_{ij} равно 1, если i делит j, и равно 0 иначе;

b) a_{ij} равно количеству общих натуральных делителей чисел i и j.