Задачи по алгебре к 13 октября 2004

1. Выразить через квадратные корни $\sqrt[5]{1}$ и $\sqrt[17]{1}$.

2*. Пусть p — простое число, и $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{p})$ — первообразный корень из единицы. Выразить через ζ

a) $\sqrt{p}$, если $p = 4k+1$;

b) $\sqrt{-p}$, если $p = 4k+3$.

3*. a) Классифицировать все тройки многочленов $X, Y, Z \in \mathbf{C}[t]$ такие, что $X^2 + Y^2 = Z^2$;
b) Доказать, что для $n > 2$ не бывает непостоянных многочленов $X, Y, Z \in \mathbf{C}[t]$ таких, что $X^n + Y^n = Z^n$.

4. Найти минимальные многочлены (т.е. неприводимые многочлены с данным корнем) для

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ над $\mathbf{Q}$;

b) $1 + \sqrt{2}$ над $\mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

5. Найти степень минимального поля разложения над $\mathbf{Q}$ (т.е. такого, в котором данный многочлен разлагается на линейные множители, а не просто имеет один корень) для многочленов

a) $x^4 - 2$;

b) $x^p - a$ (p — простое число; $a \in \mathbf{Q}$ не является p-ой степенью).