## Задачи по алгебре к 20 октября 2004

1. Являются ли числа $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $b = \sqrt{2} + i$ примитивными элементами $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbf{Q}$?

2. Пусть $K$ — поле характеристики $p > 0$.

a) Доказать, что многочлен $f(x) = x^p - x - a$ либо неприводим над $K$, либо разлагается в произведение линейных множителей, и указать это разложение, если $f(x)$ имеет корень $x_0$;

b) Доказать, что всякое расширение Галуа $L/K$ степени $p$ имеет вид $L = K(\theta)$, где $\theta$ — корень многочлена $x^p - x - a$ $(a \in K)$, и обратно, всякое такое расширение является расширением Галуа степени 1 или $p$.

3. Найти поле инвариантов $\mathbf{C}(x_1, \ldots, x_n)^G$, где $G$ — это группа, порожденная

a) всеми перестановками переменных $x_1, \ldots, x_n$;

b) автоморфизмом $x_i \mapsto \zeta^i x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $\zeta$ — первообразный корень степени $n$ из 1;

c) циклической перестановкой переменных $x_1, \ldots, x_n$.

4. Найти группу Галуа расширения $\mathbf{Q}$

a) $\mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$;

b) полученного присоединением всех корней $\sqrt[7]{5}$;

c) полученного присоединением всех корней многочлена $x^3 + ax + b$ (в зависимости от рациональных чисел $a$ и $b$).

5. Пусть $L/K$ — конечное расширение полей, $a \in L$. След, определитель и характеристический многочлен (т.е. $\det(a - t\mathrm{Id})$) $K$-линейного оператора $l \mapsto al,\ L \to L$, обозначаются соответственно через $Tr_{L/K}(a), N_{L/K}(a), \chi_{L/K}(a, t)$ и называются *следом, нормой* и *характеристическим многочленом* элемента $a$ над $K$. Доказать, что если $K \subset L \subset M$ — башня конечных расширений и $a \in M$, то

a) $Tr_{M/K}(a) = Tr_{L/K}(Tr_{M/L}(a))$;

b) $N_{M/K}(a) = N_{L/K}(N_{M/L}(a))$;

c) $\chi_{M/K}(a, t) = N_{L(t)/K(t)}(\chi_{M/L}(a, t))$;

d) Минимальный многочлен элемента $a$ над $K$ равен $\pm\chi_{K(a)/K}(a, t)$;

e) $\chi_{M/K}(a, t)$ является, с точностью до знака, степенью минимального многочлена $a$ над $K$.

f) Если $M/K$ — расширение Галуа с группой Галуа $G$, то $Tr_{M/K}(a) = \sum_{g \in G} g(a),\ N_{M/K}(a) = \prod_{g \in G} g(a)$, $\chi_{M/K}(a, t) = \prod_{g \in G}(g(a) - t)$.

6. a) Доказать, что $Tr_{M/K}(a) = 0\ \forall a \in M$ тогда и только тогда, когда расширение $M/K$ несепарабельно.

b) Доказать, что если расширение $M/K$ сепарабельно, то $K$-билинейная форма на $M: \ (x, y) \mapsto Tr_{M/K}(xy)$ невырождена.

7. Доказать, что в расширении Галуа $M/K$ с группой Галуа $G$ найдется такой элемент $a \in M$, что множество $\{g(a),\ g \in G\}$ составляет базис поля $M$ над $K$.