Задачи по алгебре к 27 октября 2004

1. Какое из следующих двух утверждений верно: a) $\sin 36^\circ \in \mathbf{Q}(\cos 36^\circ)$; b) $\cos 36^\circ \in \mathbf{Q}(\sin 36^\circ)$?

2. Пусть $f(t)$ — многочлен степени n с рациональными коэффициентами; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — его комплексные корни. Известно, что $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, но между другими корнями нет такого соотношения (т.е. если $\alpha_k = \alpha_i + \alpha_j$, то $k = 3$, а $(i, j) = (1, 2)$ или $(2, 1)$). Доказать, что $\alpha_3 \in \mathbf{Q}$, а α_1, α_2 лежат в квадратичном расширении $\mathbf{Q}$.

3. Известно, что всякий квадратный многочлен с вещественными коэффициентами имеет корень в $\mathbf{C}$, а всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет корень в $\mathbf{R}$ (т.к. непрерывная функция принимает промежуточные значения). Пользуясь этими двумя фактами доказать, в рамках теории Галуа, что $\mathbf{C}$ алгебраически замкнуто (т.е. не имеет конечных расширений).

4. Пусть K — поле, полученное из $\mathbf{F}_p$ присоединением всех примитивных корней l-ой степени из 1 для всех простых чисел $l \neq p$. Доказать, что K алгебраически замкнуто.

5. Доказать, что $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}$ линейно независимы над $\mathbf{Q}$.