Задачи по алгебре к 3 ноября 2004

1. Пусть p — простое число, и $a \in \mathbf{Q}$ не является p-ой степенью. Пусть K — расширение $\mathbf{Q}$, полученное присоединением всех корней $\sqrt[p]{a}$. Доказать, что группа Галуа $Gal(K/\mathbf{Q})$ изоморфна группе аффинных преобразований $\mathbf{F}_p$, т.е. преобразований вида $x \mapsto ax+b,\ a \in \mathbf{F}_p^*, b \in \mathbf{F}_p$.

2. Пусть $\psi(t) = \frac{f(t)}{g(t)} \in K(t)$ — рациональная функция, представленная как отношение двух взаимно простых многочленов. Определим $\deg(\psi)$ как $\max(\deg(f), \deg(g))$ и положим $u = \psi(t)$. Доказать, что $\deg(\psi) = [K(t) : K(u)]$;

3. Доказать, что всякий автоморфизм поля $K(t)$ над K имеет вид $t \mapsto \psi(t)$, где $\psi(t)$ — рациональная функция степени 1;

4. Доказать, что эта группа автоморфизмов порождается следующими отображениями $(a \in K^*, b \in K)$: $t \mapsto at$; $t \mapsto t+b$; $t \mapsto \frac{1}{t}$. Эта группа состоит из преобразований вида $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$, $ad - bc \neq 0$ и обозначается $PGL(2, K)$;

5. Пусть $K = \mathbf{F}_q$. Доказать, что $\sharp PGL(2, \mathbf{F}_q) = q^3 - q$;

6. Доказать, что поле инвариантов $PGL(2, \mathbf{F}_q)$ равно $\mathbf{F}_q(u)$, где $u = \frac{(t^{q^2}-t)^{q+1}}{(t^q-t)^{q^2+1}}$;

7. Пусть $P \subset PGL(2, \mathbf{F}_q)$ — подгруппа, состоящая из отображений $t \mapsto at+b,\ a \in \mathbf{F}_q^*, b \in \mathbf{F}_q$. Доказать, что поле инвариантов P равно $\mathbf{F}_q(y)$, где $y = (t^q - t)^{q-1}$;

8. Пусть $N \subset P \subset PGL(2, \mathbf{F}_q)$ — подгруппа, состоящая из отображений $t \mapsto t+b,\ b \in \mathbf{F}_q$. Доказать, что поле инвариантов N равно $\mathbf{F}_q(z)$, где $z = t^q - t$;

9. Для каких q из следующего списка группа $PGL(2, \mathbf{F}_q)$ разрешима: $q = 2, 3, 4, 5, 7$?