Задачи по алгебре к 17 ноября 2004

1. Найти сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена
a) $3x^3 + 2x^2 - 1$; b) $x^4 - x^2 - x - 1$.

2. Сумма двух корней многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ равна 1. Найти λ.

3. Выразить через элементарные симметрические многочлены:
a) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$;
b) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$;
c) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$;
d) $(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)$.

4. Найти значение симметрического многочлена F от корней многочлена $f(x)$:
a) $F = x_1^3(x_2 + x_3) + x_2^3(x_1 + x_3) + x_3^3(x_1 + x_2),\ f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$;
b) $F = x_1^4x_2 + \ldots,\ f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$;
c) $F = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2),\ f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 7x - 8$.

5. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Доказать, что любой симметрический многочлен от $x_2, x_3, \ldots, x_n$ можно представить в виде многочлена от x_1.

6. Рассмотрим многочлен $\lambda_t = (1 + x_1t)\ldots(1 + x_nt)$ от переменных $x_1, \ldots, x_n, t$.
a) Доказать, что $\lambda_t = 1 + \sigma_1t + \sigma_2t^2 + \ldots + \sigma_nt^n$, где σ_k — элементарные симметрические многочлены;
b) Доказать, что $\frac{d}{dt}(\log\lambda_t) = -\sum_{k>0}(-1)^ks_kt^{k-1}$, где $s_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$;
c) Доказать формулу Ньютона: $s_k - \sigma_1s_{k-1} + \sigma_2s_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^kk\sigma_k = 0$ (при $k > n$ мы полагаем $\sigma_k = 0$).

7. Пусть ζ — первообразный корень степени k из 1. Доказать, что a) для любого $a \in \mathbf{C}$ имеем $(x - a)(x\zeta - a)\ldots(x\zeta^{k-1} - a) = (-1)^{k+1}(x^k - a^k)$;
b) для любого $f(x) \in \mathbf{C}[x]$ многочлен $f(x)f(x\zeta)\ldots f(x\zeta^{k-1})$ представим в виде $h(x^k)$ для некоторого многочлена h;
c) корнями многочлена h являются в точности k-ые степени корней многочлена f.

8. Найти многочлен четвертой степени, корнями которого являются
a) квадраты комплексных корней многочлена $x^4 + 2x^3 - x + 3$;
b) кубы комплесных корней многочлена $x^4 - x - 1$.

9. Доказать, что s_k равняется определителю

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \ldots & \sigma_1 & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \ldots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$$

в то время как $k!\sigma_k$ равняется определителю

$$\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \ldots & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \ldots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}$$

10. Найти s_m от a) корней многочлена $x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$;
b) первообразных корней n-ой степени из 1.

11. Решить над $\mathbf{C}$ систему уравнений $x_1 + x_2 + x_3 = 0;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24$.