Задачи по алгебре к 24 ноября 2004

1. a) Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — кососимметрический многочлен от $x_1,\dots,x_n$. Доказать, что $f(x_1,\dots,x_n)=\Delta(x_1,\dots,x_n)g(x_1,\dots,x_n)$, где $\Delta(x_1,\dots,x_n)$ — определитель Вандермонда, а $g(x_1,\dots,x_n)$ — симметрический многочлен.

b) Пусть $h(x_1,\dots,x_n)$ — симметрический многочлен от $x_1,\dots,x_n$, причем $h(x_1,x_1,x_3,\dots,x_n)=0$. Доказать, что $h(x_1,\dots,x_n)=\Delta^2(x_1,\dots,x_n)u(x_1,\dots,x_n)$, где $u(x_1,\dots,x_n)$ — симметрический многочлен.

2. Пусть $h_k=\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}x_{i_1}\ldots x_{i_k}$, а λ_t — из задачи 6 прошлого раза. Доказать, что

a) $\lambda_t^{-1}=\sum_{k\ge0}(-1)^k h_k t^k$;

b) $\sigma_k-h_1\sigma_{k-1}+\ldots+(-1)^{k-1}h_{k-1}\sigma_1+(-1)^k h_k=0$;

c) Каждый симметрический многочлен является многочленом от $h_1,\dots,h_n$.

3. Пусть $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_n\ge0$ — набор натуральных чисел. Положим $a_\alpha(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\tau\in\Sigma_n}(\mathrm{sgn}\tau)x_{\tau(1)}^{\alpha_1}\ldots x_{\tau(n)}^{\alpha_n}$.

Доказать, что a) $a_\alpha(x_1,\dots,x_n)$ равняется определителю

$$\begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & \ldots & x_n^{\alpha_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{\alpha_n} & \ldots & x_n^{\alpha_n}\end{vmatrix}$$

b) Если $\delta=(n-1,n-2,\dots,1,0)$, то $a_\delta(x_1,\dots,x_n)=\Delta(x_1,\dots,x_n)$ — определитель Вандермонда;

4. Пусть $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ — набор натуральных чисел таких, что $\mu_1\ge\mu_2\ge\ldots\ge\mu_n\ge0$ и $\mu_1+\ldots+\mu_n=k$, т.е. разбиение числа k. Положим $\alpha_i=\mu_i+n-i$ и $S_\mu(x_1,\dots,x_n)=\frac{a_\alpha}{a_\delta}$ — многочлен Шура. Доказать, что

a) $S_\mu(x_1,\dots,x_n)$ — целочисленный симметрический многочлен;

b) $S_\mu(x_1,\dots,x_n)$ при всех $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ образуют базис пространства симметрических многочленов от $x_1,\dots,x_n$;

c) Если $\mu=(1,\dots,1)$, то $S_\mu(x_1,\dots,x_n)=\sigma_n$;

d) Если $\mu(n,0,\dots,0)$, то $S_\mu(x_1,\dots,x_n)=h_n$ из задачи 2.

5. Доказать, что a) $\prod_{i,j=1}^n(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_\mu S_\mu(x_1,\dots,x_n)S_\mu(y_1,\dots,y_n)$, суммирование по всем разбиениям на n слагаемых;

b) $\prod_{i,j=1}^n(1+x_iy_j)=\sum_\mu S_\mu(x_1,\dots,x_n)S_{\mu'}(y_1,\dots,y_n)$, где μ' — сопряженное разбиение, т.е. μ'_i — количество таких j, что $\mu_j\ge i$.

6. Доказать, что $\sum_{\tau\in\Sigma_n}\sigma_k(x_{\tau(1)}y_1,\dots,x_{\tau(n)}y_n)=k!(n-k)!\sigma_k(x_1,\dots,x_n)\sigma_k(y_1,\dots,y_n)$.

7. Вычислить результант многочленов

a) $x^3-3x^2+2x+1,\ 2x^2-x-1$;

b) $2x^3-3x^2-x+2,\ x^4-2x^2-3x+4$;

c) $2x^4-x^3+3,\ 3x^3-x^2+4$;

d) $\Phi_n,\ \Phi_m$ (круговые многочлены).

8. Исключить x из системы уравнений:

a) $x^2-xy+y^2=3,\ x^2y+xy^2=6$;

b) $y^2-7xy+4x^2+13x-2y-3=0,\ y^2-14xy+9x^2+28x-4y-5=0$;

c) $5y^2-6xy+5x^2-16=0,\ y^2-xy+2x^2-y-x-4=0$.

9. Найти все значения λ, при которых следующие многочлены имеют кратный корень:

a) $x^4-4x+\lambda$; b) $x^3-8x^2+(13-\lambda)x-(6+2\lambda)$; c) $x^4-4x^3+(2-\lambda)x^2+2x-2$.

10. Пусть f,g — многочлены. Доказать, что $D(fg)=D(f)D(g)R^2(f,g)$.

11. Вычислить дискриминант следующих многочленов:

a) $x^n+x^{n-1}+\ldots+1$; b) $\Phi_n(x)$; c) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$; d) x^n+a; e) $H_n(x)=(-1)^n\exp(\frac{x^2}{2})\frac{d^n}{dx^n}\exp(-\frac{x^2}{2})$ (многочлен Эрмита); f) $L_n(x)=(-1)^n\exp(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^n\exp(-x))$ (многочлен Лагерра); g) $P_n(x)=2\cos(n\arccos\frac{x}{2})$ (многочлен Чебышева).