Задачи к зачету по алгебре 1 декабря 2004

1. a) Является ли неприводимым многочлен $P(x) = x^3 + 2x - 6$ над полем $\mathbf{F}_5$?
b) а над полем $\mathbf{F}_{25}$?
c) а над полем $\mathbf{Q}$?
d) вычислите его дискриминант;
e) найдите группу Галуа минимального поля разложения $P(x)$ над $\mathbf{Q}$.

2. a) Перечислите все подполя конечного поля $\mathbf{F}_{4096}$;
b) Сколько неприводимых многочленов степени 11 над полем $\mathbf{F}_2$?

3. Рекуррентная последовательность задана соотношением $a_{n+1} = 2a_{n-1} + a_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1$. Найдите a_{100}.

4. Приведите матрицы к жордановой нормальной форме:

$$a)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix};\ b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

5. Докажите, что в кольце чисел вида $a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbf{Z}$, работает алгоритм Евклида.