Задачи к зачету по алгебре 3 декабря 2004

1. a) Семь богатырей сидят за круглым обеденным столом и собираются есть кашу. За один ход каждый перекладывает в свою тарелку половину каши из тарелки левого соседа и половину каши из тарелки правого соседа. Можно ли гарантировать, что через 100 ходов у них будет практически поровну каши?

b) А если с ними за столом (еще не спящая) царевна?

2. a) Можно ли выразить $(\frac{1+\sqrt{-3}}{2})\sqrt[3]{3}$ через $\sqrt[36]{1}$, т.е. содержится ли $\mathbf{Q}\left((\frac{1+\sqrt{-3}}{2})\sqrt[3]{3}\right)$ в $\mathbf{Q}(\sqrt[36]{1})$?

b) Можно ли выразить $\sqrt{7}$ через $\sqrt[7]{1}$?

c) Можно ли выразить $\sqrt{7}$ через $\sqrt[14]{1}$?

d) Можно ли выразить $\sqrt{7}$ через $\sqrt[28]{1}$?

3. Решите над $\mathbf{C}$ систему уравнений $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6,\ x_1x_2x_3-x_1^3-x_2^3-x_3^3=4,\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-3.$

4. Вычислите определитель (Указание: это произведение линейных множителей)

$$\begin{vmatrix} e & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & e & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & e & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & e \end{vmatrix}$$

5. a) Разрешима ли группа аффинных преобразований $\mathbf{F}_7$ вида $t \mapsto at+b,\ a,b\in\mathbf{F}_7,\ a\neq 0$?

b) А группа дробно-линейных преобразований $\mathbf{F}_7$ вида $t\mapsto \frac{at+b}{ct+d},\ a,b,c,d\in\mathbf{F}_7,\ ad-bc\neq 0$?