Задачи к зачету по алгебре 8 декабря 2004

1. a) Найдите матрицу перехода от базиса $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ к базису $1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$ в пространстве многочленов степени не выше n; здесь a — положительное число;
b) Найдите логарифм этой матрицы.

2. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в 4-мерном пространстве 2×2-матриц задан формулой $\mathcal{A}(X) = AX - XA$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Приведите $\mathcal{A}$ к жордановой нормальной форме.

3. Известно, что квадратные $n \times n$-матрицы A, B с вещественными коэффициентами $\mathbf{C}$-подобны, т.е. существует $n \times n$ матрица C с комплексными коэффициентами, такая что $B = CAC^{-1}$. Верно ли, что A и B $\mathbf{R}$-подобны, т.е. можно выбрать другую C с вещественными коэффициентами?

4. Пусть j, k — натуральные числа, и d — их наибольший общий делитель, а e — наименьшее общее кратное. Докажите, что результант многочленов $x^j - a^j,\ x^k - b^k$ равен $(-1)^j(b^e - a^e)^d$.

5. Найдите порядок элемента $\overline{32x_1 + 31x_2}$ в факторгруппе свободной абелевой группы с образующими x_1, x_2, x_3 по подгруппе, порожденной $2x_1 + x_2 - 50x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 60x_3$.

6. Найдите все образующие группы Галуа $\mathbf{Q}(\sqrt[17]{1}) : \mathbf{Q}$.

7. Является ли $\frac{3+4i}{5}$ корнем из единицы?

8. Пусть $x, y \in \mathbf{F}_{2^{2k+1}}$ и $x^2 + xy + y^2 = 0$. Докажите, что $x = y = 0$.

9. Найдите все n, для которых любой (не обязательно неприводимый) многочлен степени n с коэффициентами в $\mathbf{F}_p$ имеет корень в $\mathbf{F}_{p^n}$.