1. Выпишите (**а**) все неприводимые многочлены степени не выше 4 над $\mathbb{F}_2$; (**б**) все приведённые (со старшим коэффициентом 1) неприводимые многочлены степени 3 над $\mathbb{F}_3$.

2. Вычислите количество (**а**) неприводимых многочленов степеней 5 и 6 над $\mathbb{F}_2$; (**б**) приведённых неприводимых многочленов степеней 4 и 5 над $\mathbb{F}_3$.

3. Вычислите количество приведённых неприводимых многочленов степеней 2 и 3 над (**а**) $\mathbb{F}_4$; (**б**) $\mathbb{F}_9$.

4. Пусть $a_n(q)$ — количество приведённых неприводимых многочленов степени n над $\mathbb{F}_q$.

(**а**)* Докажите равенство степенных рядов:

$$\prod_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{1-t^n}\right)^{a_n(q)}=\frac{1}{1-qt}.$$

(**б**) Докажите, что $q^n=\sum\limits_{d|n} da_d(q)$. (Указание. Вычислите логарифмическую производную обеих частей равенства из предыдущего пункта.)

(**в**) (Формула обращения Мёбиуса) Пусть f и g — две функции натурального аргумента, причём для каждого n верно равенство $f(n)=\sum_{d|n} g(d)$. Тогда для каждого n $g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(n/d)$, где μ — функция Мёбиуса,

$$\mu(n)=\begin{cases}0, \text{ если } n \text{ делится на квадрат некоторого простого числа,}\\ (-1)^k, \text{ если } n \text{ — произведение } k \text{ различных простых чисел.}\end{cases}$$

(**г**) Вычислите $a_n(q)$.

(**д**) Докажите, что для любого n над $\mathbb{F}_q$ существует неприводимый многочлен степени n.

5. Докажите, что мультипликативная группа конечного поля циклическая.

6. Докажите, что в $\mathbb{F}_{p^2}$ любое квадратное уравнение с коэффицентами из $\mathbb{F}_p$ имеет решение. Верно ли аналогичное утверждение про $\mathbb{F}_{p^3}$ и кубические уравнения?

7. Для каких простых чисел p существует такой элемент $a\in\mathbb{F}_p$, что $\mathbb{F}_{p^3}=\mathbb{F}_p[\sqrt[3]{a}]$?

8. Докажите, что многочлен x^p-x-a либо неприводим над $\mathbb{F}_{p^n}$, либо раскладывается в произведение линейных множителей, причём последнее имеет место если и только если $a+a^p+a^{p^2}+\ldots+a^{p^{n-1}}=0$.

9.* Докажите, что многочлен $x^{2n}+x^n+1$ неприводим над $\mathbb{F}_2$ если и только если n — степень тройки.