1. (Алгебра обобщённых кватернионов) Докажите, что любая четырёхмерная центральная простая алгебра над любым полем F с $\operatorname{char} F \neq 2$ может быть задана как алгебра с образующими x, y и соотношениями $x^2 = a$, $y^2 = b$, $yx = -xy$ (для некоторых $a, b \in F$).

2. Предположим, что основное поле F содержит элемент ξ — примитивный корень из единицы степени n и $(\operatorname{char} F, n) = 1$.

(**а**) Докажите, что любая циклическая центральная простая алгебра размерности n^2 над полем F изоморфна алгебре $A_\xi(a, b)$ для подходящих $a, b \in F$.

(**б**) Докажите, что классы алгебр $A_\xi(a, b)$ в группе $\operatorname{Br}(F)$ удовлетворяют соотношениям кососимметричности и билинейности, а также соотношению Стейнберга.

3. Вычислите группу $K_2(\mathbb{F}_q)$.

4. Докажите, что в группе $K_2(F)$ из билинейности (по обоим аргументам) и соотношения Стейнберга $\{a, 1-a\} = 1$ формально следуют равенства $\{a, -a\} = 1$ и $\{a, b\}\{b, a\} = 1$.

5. Докажите, что группа $K_2(\mathbb{C})$ несчётна.

6. (**а**) Пусть $h(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_k]$, N — число решений уравнения $h(x_1, \ldots, x_k) = 0$ в $\mathbb{F}_q^k$, $\overline{N} = (N \bmod p) \in \mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_q$ ($p = \operatorname{char} \mathbb{F}_q$). Докажите, что

$$\overline{N} = \sum_{a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F}_{p^n}} (1 - h(a_1, \ldots, a_k)^{q-1}).$$

(**б**) Докажите теорему Шевалле–Варнинга: если $F(x_1, \ldots, x_n)$ — однородный многочлен положительной степени $k < n$ от n переменных над $\mathbb{F}_q$, то в $\mathbb{F}_q^n$ найдётся ненулевой вектор, на котором многочлен F равен нулю.

7. Докажите теорему Гамильтона–Кэли для центральных простых алгебр: $\chi(a, t)|_{t=a} = 0$.