1. Укажите какой-либо примитивный элемент $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$ над $\mathbb{Q}$.

2. Вычислите группу Галуа $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, если (**а**) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; (**б**) L — минимальное поле разложения над $\mathbb{Q}$ многочлена $x^7 - 3$.

3. Пусть $z = \prod(\pm 1 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \ldots \pm \sqrt{111})$, где произведение берётся по всевозможным выборам знаков. Докажите, что z — (**а**) целое число; (**б**) квадрат целого числа.

4. Придумайте многочлен с рациональными коэффициентами, для которого группа Галуа поля разложения над $\mathbb{Q}$ есть S_3. Укажите явно подполя, соответствующие различным подгруппам S_3.

5. Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что единственное квадратичное (т. е. размерности 2 над $\mathbb{Q}$) подполе в круговом поле $\mathbb{Q}(\xi_p)$ получается присоединением $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$.

Для элемента a конечного расширения L/K определим его *след, норму, характеристический многочлен* соответственно как след, определитель и характеристический многочлен линейного оператора на K-векторном пространстве L, переводящего $l \in L$ в $a \cdot l$. Обозначения: $\mathrm{tr}_{L/K}(a)$, $N_{L/K}(a)$, $\chi_{L/K}(a,t)$.

6. Вычислите $\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(\sqrt{2})$.

7. Пусть L/K — конечное расширение. (**а**) Докажите, что $L(t)/K(t)$ — конечное расширение той же степени. (**б**) Докажите, что $\chi_{L/K}(a,t) = N_{L(t)/K(t)}(a-t)$.

8. Пусть $K \subset L \subset M$ — башня конечных расширений.

Докажите равенства ($a \in M$): (**а**) $[M:K] = [M:L] \cdot [L:K]$; (**б**) $\mathrm{tr}_{M/K}(a) = \mathrm{tr}_{L/K}(\mathrm{tr}_{M/L}(a))$; (**в**) $N_{M/K}(a) = N_{L/K}(N_{M/L}(a))$; (**г**) $\chi_{M/K}(a,t) = N_{L(t)/K(t)}(\chi_{M/L}(a,t))$.

(**д**) Докажите. что если L/K — расширение Галуа, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, то $\mathrm{tr}_{L/K}(a) = \sum\limits_{g\in G} g(a)$, $N_{L/K}(a) = \prod\limits_{g\in G} g(a)$, $\chi_{L/K}(a,t) = \prod\limits_{g\in G}(g(a)-t)$.

(**е**) Известно, что расширения M/L, L/K сепарабельны. Верно ли, что расширение M/K сепарабельно?

(**ж**) Известно, что расширения M/L, L/K нормальны. Верно ли, что расширение M/K нормально?