1. (**а**) Укажите какой-либо элемент, порождающий $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$.

(**б**) Объясните, как с помощью циркуля и линейки построить правильный 17-угольник.

2. Пусть p — простое число, L — произвольное поле, $a \in L$.

(**а**) Докажите, что многочлен $x^p - a$ либо неприводим, либо имеет корень в L.

(**б**) Пусть теперь $L = \mathbb{Q}$, число a не является p-ой степенью, поле K получается присоединением к L всех корней степени p из a. Докажите, что $\mathrm{Gal}(K/L)$ — группа аффинных преобразований $\mathbb{F}_p$, т. е. преобразований $x \mapsto ax + b$, $a \in \mathbb{F}_p^*$, $b \in \mathbb{F}_p$.

3. Пусть поле F получается из $\mathbb{F}_p$ (p — простое) присоединением всех корней степени l из единицы, где l пробегает простые числа, отличные от p. Докажите, что поле F алгебраически замкнуто.

4. Пусть G — группа, H — её нормальная подгруппа. Докажите, что G разрешима тогда и только тогда, когда H и G/H разрешимы.

5. Докажите, что группа $SL_n(F)$ не является разрешимой, если $n > 2$ или $n = 2$ и в поле F больше 3 элементов. (Указание. Докажите, что эта группа совпадает со своим коммутантом.)

6. Докажите, что $\mathrm{tr}_{M/K}(a) = 0$ для каждого $a \in M$ тогда и только тогда, когда расширение M/K несепарабельно.

7. Пусть M/K — сепарабельное расширение. Определим на M K-билинейную форму B равенством $B(x, y) = \mathrm{tr}_{M/K}(xy)$. Докажите, что эта форма является невырожденной.

8. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Укажите базис поля $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ над $\mathbb{Q}$.