1. Пусть f — многочлен степени n с рациональными коэффициентами, $a_1, \ldots, a_n$ — все его комплексные корни. Известно, что a_3 есть сумма a_1 и a_2, а между другими корнями нет такого соотношения (т. е. из $a_k = a_i + a_j$ следует $k = 3$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$). Докажите, что $a_3 \in \mathbb{Q}$, а a_1, a_2 лежат в квадратичном расширении $\mathbb{Q}$.

2. Выразите через элементарные симметрические многочлены (от нужного числа переменных) следующие многочлены:

(**а**) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$;

(**б**) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$;

(**в**) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$.

3. Обозначим $f(t) = \prod\limits_{k=1}^{n}(1 + x_k t)$, $s_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$ — многочлены Ньютона (степенные суммы), $h_k = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ — полные симметрические функции.

(**а**) Докажите, что $\frac{d}{dt} \ln f(t) = \sum_{k>0} (-1)^{k-1} s_k t^{k-1}$.

(**б**) Докажите формулу Ньютона

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0.$$

(При $k > n$ нужно считать $\sigma_k = 0$.)

(**в**) Докажите, что каждый симметрический многочлен есть многочлен от $s_1, \ldots, s_n$.

(**г**) Докажите, что $\frac{1}{f(t)} = \sum\limits_{k \geqslant 0} (-1)^k h_k t^k$.

(**д**) Докажите, что каждый симметрический многочлен есть многочлен от $h_1, \ldots, h_n$.

4. Вычислите дискриминант и группу Галуа над $\mathbb{Q}$ многочлена

(**а**) $x^3 - x - 1$;

(**б**) $x^3 - 7x + 7$.

5. Вычислите группу Галуа над $\mathbb{Q}$ многочлена $x^4 + 2x^2 + x + 3$.

6. Приведите пример многочлена степени n с рациональными коэффициентами, группа Галуа которого над $\mathbb{Q}$ есть S_n, если (**а**) $n = 5$; (**б**) $n = 6$.