1. Вычислите дискриминант многочлена $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1$.

2. Исключите x из системы уравнений

$$\begin{cases} x^3-xy^2+xy=1, \\ 2x^3y-x^2y^2-1=0. \end{cases}$$

3. (**а**) Пусть $a(x_1,\ldots,x_n)$ — кососимметрический многочлен от $x_1,\ldots,x_n$. Докажите, что $a(x_1,\ldots,x_n)$ — произведение $\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)$ и некоторого симметрического многочлена.

(**б**) Пусть $c(x_1,\ldots,x_n)$ — симметрический многочлен от $x_1,\ldots,x_n$, причём $c(x_1,x_1,x_3,\ldots,x_n)=0$. Докажите, что $c(x_1,\ldots,x_n)$ — произведение $\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)^2$ и некоторого симметрического многочлена.

4. Пусть $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$ — последовательность натуральных чисел. Пусть a_λ — определитель матрицы (a_{ij}) с $a_{ij}=x_i^{\lambda_j+n-j}$.

(**а**) Докажите, что многочлен a_λ делится на $\prod_{i<j}(x_i-x_j)$. Обозначим частное $s_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$.

(**б**) Докажите, что многочлены s_λ (многочлены Шура) симметрические и образуют базис пространства всех симметрических многочленов (над основным полем).

(**в**) Докажите, что если $\lambda_1=\ldots=\lambda_k=1$, а $\lambda_{k+1}=\ldots=\lambda_n=0$, то $s_\lambda=\sigma_k$.

(**г**) Докажите, что если $\lambda_1=k$, а $\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$, то $s_\lambda=h_k$.

5. Докажите, что алгебра $n\times n$-матриц над любым телом проста.

6. (**а**) Укажите базис в алгебре $\mathcal{A}_1$ с образующими p,q и соотношением $pq-qp=1$. (Указание. Полезно представление этой алгебры операторами $p\mapsto\frac{d}{dx}$ (взятие производной), $q\mapsto x$ (умножение на x) на пространстве многочленов.)

(**б**) Укажите базис в алгебре $\mathcal{A}_n$ с образующими $p_1,\ldots,p_n$, $q_1,\ldots,q_n$ и соотношениями $p_ip_j=p_jp_i$, $q_iq_j=q_jq_i$, $p_iq_j-q_jp_i=\delta_{ij}\cdot 1$.

(**в**) Укажите базис в алгебре с образующими p,q и соотношениями $p^2=0$, $q^2=0$, $pq+qp=1$.