1. Пусть A, B — представители одного класса группы Брауэра. Докажите, что любое поле расщепления для одной из этих алгебр будет полем расщепления для другой.

2. (**а**) Напомним, что подполе E центральной простой алгебры A называется строго максимальным, если $\dim A = (\dim E)^2$. Докажите, что строго максимальное подполе максимально. (**б**) Приведите пример центральной простой алгебры и её максимального подполя, не являющегося строго максимальным. (**в**) Докажите, что для центрального тела любое максимальное подполе строго максимально.

3. Пусть E — расширение основного поля F, $G = \mathrm{Gal}(E : F)$. Напомним, что скрещённое произведение G и E — это пространство $E \otimes_F F[G]$, снабжённое необычной операцией умножения. Именно, фиксируется набор элементов $c_{g,h} \in E^*$ («система факторов), и закон умножения определяется формулами

$$\begin{aligned}(1 \otimes g)(1 \otimes h) &= c_{g,h} \otimes gh,\\ (1 \otimes g)(l \otimes 1) &= g(l) \otimes g,\\ (l \otimes 1)(1 \otimes g) &= l \otimes g,\\ (l \otimes 1)(l' \otimes 1) &= ll' \otimes 1.\end{aligned}$$

(**а**) Каким условиям должна удовлетворять система факторов, чтобы эти правила задавали на скрещённом произведении ассоциативное умножение? Как с помощью этих правил перемножить $(l \otimes g)(l' \otimes h)$?

(**б**) Пусть система факторов такова, что умножение ассоциативно. Докажите, что скрещённое произведение — центральная простая алгебра, в которой E — строго максимальное подполе.

4. Рассмотрим алгебру кватернионов над конечным полем из q элементов (это возможно, поскольку соотношения целочисленны).

(**а**) Какой из известных Вам алгебр изоморфна эта алгебра?

(**б**) Сколько элементов в её группе автоморфизмов?

5. Опишите с точностью до замен координат невырожденные квадратичные формы над $\mathbb{F}_q$ и соответствующие им алгебры Клиффорда. (Здесь q — степень *нечётного* простого числа.)