Решения задач нужно сдать в учебную часть или непосредственно В. Доценко (dotsenko@mccme.ru, 2554732) не позже $19^{00}$ понедельника 20 декабря.

Ориентировочные критерии оценок: 8 задач — «5», 6 задач — «4», 4 задачи — «3»; пересдача в феврале. Удачи!

**1.** Пусть $q = p^n$. Докажите, что многочлен $x^q - x$ раскладывается над $\mathbb{F}_p$ в произведение неприводимых так: в разложение входят ровно по одному разу все приведённые неприводимые многочлены степеней, делящих $n$.

**2.** Пусть $a$ — какой-нибудь комплексный корень многочлена $f(x) = x^4 + 2x^2 + x + 3$. Существует ли неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен степени 5 с рациональными коэффициентами, поле разложения которого содержит подполе $\mathbb{Q}(a)$?

**3.** (**а**) Укажите расширение Галуа $K$ поля $\mathbb{Q}$, над которым группа Галуа многочлена $f(x)$ из предыдущей задачи (т. е. группа Галуа его поля разложения над $K$) изоморфна четверной группе Клейна.

(**б**) Найдите многочлен с рациональными коэффициентами, для которого построенное Вами поле $K$ является (минимальным) полем разложения.

(**в**) Единственно ли такое расширение $K$?

**4.** Вычислите группу Галуа многочлена $x^4 - (t^2 + 3t + 2)x + t^2$ над $\mathbb{F}_5(t)$.

**5.** Для рациональной функции $u \in K(t)$, представленной в виде отношения взаимно простых многочленов, $u = \frac{g(t)}{h(t)}$, обозначим $d(u) = \max(\deg g, \deg h)$. Ещё одно обозначение: $PGL_2(K)$ — это группа автоморфизмов $K(t)$ над $K$.

(**а**) Проверьте, что многочлен $g(t) - uh(t)$ является минимальным многочленом для $t$ над $K(u)$, т. е. $[K(t) : K(u)] = d(u)$.

(**б**) Докажите, что $PGL_2(K)$ состоит из дробно-линейных замен $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$ и вычислите $\#PGL_2(\mathbb{F}_q)$.

(**в**) Докажите, что поле инвариантов $PGL_2(\mathbb{F}_q)$ равно $\mathbb{F}_q(u)$, где $u = \frac{(t^{q^2}-t)^{q+1}}{(t^q-t)^{q^2+1}}$.

**6.** Рассмотрим не все многочлены шестой степени, а только те, которые имеют вид $x^6 + ax + b$. Существует ли для них общая формула, выражающая корни через $a$ и $b$ в радикалах?

**7.** Пусть $q \in \mathbb{C}$. Положим

$$\mathcal{H}_q = \mathbb{C}\langle s_1, s_2 \mid (s_1 - 1)(s_1 + q) = (s_2 - 1)(s_2 + q) = 0, s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2 \rangle.$$

(**а**) Докажите, что алгебра $\mathcal{H}_1$ полупроста.

(**б**) Докажите, что алгебра $\mathcal{H}_q$ полупроста для почти всех $q$ (всех, кроме конечного числа).

(**в**) Полупроста ли алгебра $\mathcal{H}_{-1}$? а $\mathcal{H}_{\sqrt[3]{1}}$?

**8.** Пусть $A$ и $B$ — центральные тела взаимно простых размерностей над одним и тем же полем $F$. Верно ли, что $A \otimes_F B$ — тело?

**9.** Пусть $A$ — алгебра над полем $F$. Верно ли, что если $A \otimes_F A^{opp} \simeq \mathrm{Mat}_{\dim A}(F)$, то алгебра $A$ проста?

**10.** (**а**) Какие из следующих алгебр являются алгебрами с делением:

$$A = \mathbb{Q}\langle i, j \mid i^2 = 2, j^2 = -3, ij = -ji \rangle,$$
$$B = \mathbb{Q}\langle i, j \mid i^2 = -2, j^2 = 3, ij = -ji \rangle,$$
$$C = \mathbb{Q}\langle i, j \mid i^2 = -1, j^2 = 3, ij = -ji \rangle?$$

Изоморфны ли они?

(**б**) Изоморфна ли какая-нибудь из этих алгебр алгебре $D = \mathbb{Q}\langle i, j \mid i^2 = -1, j^2 = 7, ij = -ji \rangle$?