Решения задач нужно сдать в учебную часть или непосредственно В. Доценко (dotsenko@mccme.ru, 2554732) не позже 19^{00} пятницы 25 февраля.

Ориентировочные критерии оценок: 8 задач — «5», 6 задач — «4», 4 задачи — «3». Удачи!

1. Вычислите дискриминант многочлена $x^{2005}+x+1$.

2. Приведите пример поля K и двух его подполей K_1 и K_2, таких что $[K:K_1]=[K:K_2]=2$, но (**а**) $[K:K_1\cap K_2]>4$; (**б**) $[K:K_1\cap K_2]=\infty$.

3. Вычислите группу Галуа многочлена $x^4-(3+4i)x+1$ над $\mathbb{Q}(i)$.

4. Найдите группу автоморфизмов $\mathbb{F}_{25}(\sqrt[75]{t})$ над $\mathbb{F}_{25}(t)$.

5. Приведите пример расширения Галуа поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа, изоморфной (**а**) D_4; (**б**) D_5.

6. (**а**) Пусть $L:\mathbb{Q}$ — конечное расширение. Докажите, что L может содержать лишь конечное множество корней из единицы. (**б**) Опишите все корни из единицы в полях $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

7. (**а**) Докажите, что групповая алгебра конечной группы полупроста, если характеристика основного поля не делит порядок группы. (**б**) Приведите примеры, доказывающие, что это утверждение нельзя ослабить (т. е. докажите, что конечность группы и условие на характеристику здесь существенны).

8. Центральное тело D над некоторым полем 36-мерно. Докажите, что $D\not\simeq D^{opp}$.

9. Докажите, что $\mathbb{Q}$-алгебра $\mathrm{Mat}_3\left(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})\right)\otimes\mathrm{Mat}_2\left(\mathbb{Q}(\sqrt[10]{8})\right)$ полупроста и укажите её разложение в сумму простых.

10. Является ли алгебра $A=\mathbb{Q}\langle i,j \mid i^2=2, j^2=5, ij=-ji\rangle$ алгеброй с делением? Если да, укажите какое-либо рациональное число d, для которого A расщепляется над $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.