# Задачи письменного экзамена (28 ноября 2004 года)

1. Убывающая последовательность положительных чисел $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$ такова, что ряд $\sum a_i$ сходится. Покажите, что $a_n = o(1/n)$ (для всякого $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших $n$ выполняется неравенство $a_n < \varepsilon/n$).

2. Нарисовать на плоскости точки $(x, y)$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{2n} + y^{2n}} = 1.$$

3. Пусть $X$ и $Y$ — компактные метрические пространства. Рассмотрим их произведение $X \times Y$ и пространство $C(X \times Y)$ непрерывных функций на этом произведении с метрикой равномерной сходимости.

Функцию $f \in C(X \times Y)$ будем называть *разложимой*, если существуют функции $g \in C(X)$ и $h \in C(Y)$, для которых

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

при любых $x \in X$ и $y \in Y$.

(а) Будет ли множество разложимых функций замкнуто в $C(X \times Y)$?

(б) Найти замыкание в $C(X, Y)$ множества $R_k$, состоящего из всех функций, представимых в виде суммы не более чем $k$ разложимых.

(в) Найти замыкание в $C(X, Y)$ объединения всех множеств $R_k$.

4. Существует ли

(а) строго возрастающее отображение $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

(б) отображение $\mathbb{Q}$ *на* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (слово «на» означает, что отображение сюръективно, то есть множество значений совпадает с $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

(в) неубывающее отображение $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *на* $\mathbb{Q}$?

5. Пусть $M(h)$ — центр окружности, проведённой через три точки на графике $y = \cos x$, имеющие абсциссы $-\varepsilon$, $0$ и $\varepsilon$. Найти предельное положение точки $M(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

6. Число $T$ называется *периодом* функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если $f(x + T) = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

(а) Найдите множество периодов функции $x \mapsto \sin x + \cos 2x$.

(б) Каким может быть множество периодов для непрерывной функции?

7. Покажите, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причём $|f(x) - f(y)| \leqslant |y - x|^{3/2}$, то функция $f$ постоянна.

8. (а) Известно, что для непрерывно дифференцируемой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ предел

$$\lim_{x\to\infty} \bigl[f(x) + f'(x)\bigr]$$

существует и равен $A$. Следует ли отсюда, что

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A?$$

(б) Тот же вопрос, если известно, что

$$\lim_{x\to\infty} \bigl[f(x) - f'(x)\bigr] = A.$$