НМУ, 1 курс, анализ. Листок 1. Конкретная теория пределов. 10.09.04

相思

王维

红豆生南国，
春来发几枝？
愿君多采撷，
此物最相思。

Red berries grow in southern land,
In spring they overload the trees.
Gather them till full is your hand:
They would revive fond memories.

Wang Wei, Love seeds

(translated by Xu Yuanchong).

Задачи этого листка интересны не только как иллюстрация теории пределов. Похожие задачи о конкретных, хотя и грубых, оценках, часто возникают в прикладной (и теоретической) математике.

В решении этих задач нельзя пользоваться функциями $\sqrt[n]{x}$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$ etc., поскольку для определения этих функций (например, для доказательства существования такого x, что $x^2 = 2$) фактически нужно эти задачи решить (исключение: если некоторая функция используется в условии, то ее можно использовать и в решении). Однако можно пользоваться без доказательства неравенствами и их свойствами.

0. *Неравенство Бернулли.* $(1+x)^n \geq 1 + nx$ для $x \geq 0$ и целого $n \geq 0$.

1. Найдите хотя бы одно такое N, чтобы для любого $n > N$ выполнялось $a_n > 10^9$, если

(a) $a_n = 1,02^n$; (b) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$.

2. Найдите хотя бы одну пару таких a и N, чтобы для любого $n > N$ выполнялось $|a_n - a| < 10^{-8}$, если

(a) $a_n = \frac{n^2-n+28}{n-2n^2}$. Указание: если $|a_n - a| < \varepsilon/2$ при $n > N$ и $|b_n - b| < \varepsilon/2$ при $n > M$, то $|a_n + b_n - a - b| < \varepsilon$ при $n > \max\{M, N\}$. Аналогичные утверждения справедливы с заменой суммы на разность, произведение и частное.

(b) $a_n = n(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1)$; (c) $a_n = \sqrt[n]{2}$; (d) $a_n = n^9/2^n$;

(e)* $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$.

(f) $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$; (g)* $a_n = \frac{1}{1\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$;

(h) $a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$; (i)* $a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$;

(j) $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$; (k)* $a_n = n(\sqrt[n]{2} - 1)$.

3. Найдите хотя бы одну пару таких a и $\delta > 0$, чтобы для любого $x \in (-\delta, \delta)$ было выполнено $|f(x) - a| < 3 \cdot 10^{-9}$, если

(a) $f(x) = x^3$; (b) $f(x) = 3^x$; (c) $f(x) = \sin x$; (d) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;

(e)* $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^5}}{\cos x - 2}$.