НМУ, 1 курс, анализ. Листок 2. Ряды с неотрицательными членами. 24.09.04.

Often we do not achieve for others the good we intend; but we achieve something, something that goes on from our effort.
I. Murdoch, The Bell.

Ньютон считал понятия производной и интеграла не своим главным достижением, а лишь естественным языком для записи дифференциальных уравнений, которыми выражаются законы природы. Своим главным достижением в анализе Ньютон считал метод решения дифференциальных уравнений с помощью рядов. С них мы и начнем (а остальные использованные в этом абзаце понятия определим потом).

В этом листке считается, что $a_n \geq 0$ и $b_n \geq 0$. Число A называется *суммой* ряда a_n, если

(1) $A \geq a_1 + \ldots + a_n$ для любого n, и

(2) для любого $\varepsilon > 0$ существует n, для которого $A < a_1 + \ldots + a_n + \varepsilon$.

Обозначение: $A = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$, сокращенно $A = \Sigma a_n$. Если у ряда существует сумма, то он называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящихся*.

В нашем курсе не будет необходима строгая теория действительных чисел (с ней можно ознакомиться, например, по книге *В. А. Зорич, Математический анализ, I*). Можно пользоваться без доказательства (только) алгебраическими свойствами действительных чисел и принципом Вейерштрасса: *ряд $\{a_n\}$ с положительными членами сходится, если последовательность $a_1 + \ldots + a_n$ ограничена.*

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение нужно доказать. Равенства о рядах являются утверждениями, которые подробно формулируются так: если правая часть существует, то левая тоже существует и равна правой. Выражение 'для любого n' часто опускается. Если доказательство одного из следующих утверждений вызывает у Вас трудности, обратитесь к преподавателю.

$\Sigma(a_n + b_n) = \Sigma a_n + \Sigma b_n$, $\quad \Sigma \lambda a_n = \lambda \Sigma a_n \quad$ и $\quad \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \ldots + a_k + \Sigma_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$.

Необходимое условие сходимости. Если ряд Σa_n сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любого $n > N$ выполнено неравенство $a_n < \varepsilon$.

Признак сравнения. Если ряд Σa_n сходится и $b_n \leq a_n$, то ряд Σb_n тоже сходится.

Признак Даламбера. Если $\varepsilon > 0$, $N > 0$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \varepsilon$ для любого $n > N$, то ряд Σa_n сходится.

Признак Коши. Если $\varepsilon > 0$, $N > 0$ и $\sqrt[n]{a_n} < 1 - \varepsilon$ для любого $n > N$, то ряд Σa_n сходится.

1. *Явное вычисление частичной суммы (например, через разложение на простейшие дроби).* Найдите: (a) $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; (b)* $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$ (указание: начните с $k = 2$).

2. *Составление уравнений.* Сумму $S = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ можно найти из уравнения $1 + \frac{S}{2} = S$ (если доказать, что сумма существует). Найдите (a) $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. (b)* $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

3. *Перегруппировка слагаемых.* Сумму $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ можно найти и из равенства
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots) + (\frac{1}{8} + \ldots) + \ldots$.

(a) Найдите сумму ряда $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ (выяснив, при каких x он сходится).

(b) Если $\sigma : \{0, 1, 2, \ldots\} \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ — перестановка, то $\Sigma a_{\sigma(n)} = \Sigma a_n$.

4. *Умножение рядов.* Сумму $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ можно найти и из равенства
$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots) = 1 \cdot 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 4} + \ldots$.

(a) $(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots)^2 = (\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + \ldots)$.

(b) $(\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n)(\Sigma_{n=0}^{\infty} b_n) = \Sigma_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)$.

5. *Преобразование Абеля.* Сумму $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ можно найти и из равенства
$1(1 - \frac{1}{2}) + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + 3(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) + \ldots = 1 + \frac{1}{2}(2 - 1) + \frac{1}{4}(3 - 2) + \frac{1}{8}(4 - 3) + \ldots)$.

(a)* Найдите $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})}{2^n}$.

(b) Если $a_n \leq a_{n-1}$ и $b_n \leq b_{n-1}$, то $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n(a_{n-1} - a_n) = a_0 b_0 - \Sigma_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$.

6. Какие из следующих рядов сходятся (в зависимости от $s > 0$)?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{2n-1})^n$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$; (c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)^s}$; (d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

7. Дайте определение сходимости и суммы ряда с произвольными (не обязательно положительными) членами. Какие из утверждений 3b, 4b, 5b верны без предположения о положительности членов рядов? Как подправить те, которые неверны?

Для овладения дальнейшим материалом нужно по каждому предыдущему листку сдать почти все задачи без звездочек, либо сдать почти все задачи со звездочками, либо после разбора листка у доски успешно написать очную контрольную работу по несданным задачам этого листка. За это и будет ставиться зачет по листку; зачет за семестр складывается из зачетов по листкам. **Для овладения курсом** (и сдачи экзамена) нужно решать больше; решать почти все задачи из листков достаточно.