НМУ, 1 курс, анализ. Листок 3. Производная. 1-8.10.04.

В этом листке можно использовать без доказательства только замечательные пределы, арифметику дифференцирования и доказанные на лекциях теоремы о *непрерывных* функциях.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение нужно доказать.

1. (a) Приведите контрпример к утверждению: если функция f непрерывна, $f(0) = 1$ и пределы $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ и $\lim_{y\to 1} g(y)$ существуют, то они равны.

(b) Сформулируйте и докажите теорему о замене переменной в пределе.

(c) Найдите $(\cos(e^x))'$. Где Вы использовали (b)?

2. (a) Найдите $(x^{-5/3})'$.

(b) Найдите формулу для производной произведения трех функций.

(c)* Найдите формулу для второй производной произведения двух функций.

3. Если $f'(a) = 0$ и $f''(a) = 2$ для дважды дифференцируемой функции f, то точка a является локальным минимумом.

4. (a) Найдите все такие функции $f : R \to R$, что $f'(x) = 1 = -f(0)$.

(b) $\ln(1 + x) \le x$ при всех $x > -1$.

5. (a) При $h \to 0$ имеем $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)$.

(b)* Рассмотрим последовательность $x_0 = 0$; $x_{n+1} = \cos x_n$. Что больше: x_{100} или x_{101}? Что больше: $|x_{100} - x_{101}|$ или 10^{-10}?

6. Найдите предел (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - x}{x^3}$. (b)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\operatorname{arctg} \arcsin x - \arcsin \operatorname{arctg} x}$.

7.* (a) Подберите такие константы a, b, c, чтобы предел $\lim_{h\to 0} \frac{af(x)+bf(x+h)+cf(x+2h)}{h^2}$ равнялся бы $f''(x)$ для любой функции, имеющей вторую производную в x.

(b) Напишите и докажите аналогичную формулу для n-й производной.

8.* Известно, что функция f дважды дифференцируема на всей прямой $f(0) = f(1) = 0$ и $|f''(x)| \le 1$ для всех x. Чему равно максимально возможное значение $f(0{,}6)$?

9. *Равномерная сходимость.*

(a) Известно, что функция $f\colon [0, +\infty) \to R$ непрерывна на своей области определения и последовательность $f(x), f(x + 1), f(x + 2), \ldots$ стремится к нулю для любого $x \ge 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$?

(b)* Тот же вопрос, если известно, что последовательность $f(x), f(2x), f(3x), \ldots$ стремится к нулю для любого $x > 0$.

(c) Будет ли функция $\sin x^2$ равномерно непрерывна на всей прямой? тот же вопрос про функцию $\operatorname{arctg} x^2$.

(d) Если последовательность непрерывных функций $f_n\colon R \to R$ равномерно сходится к функции f, то f непрерывна.

(e)* Если последовательность дифференцируемых функций $f_n\colon R \to R$ равномерно сходится к функции f, а последовательность их производных равномерно сходится к непрерывной функции g, то f дифференцируема и $f' = g$.