НМУ, 1 курс, анализ. Листок 4. Ряды с произвольными членами. 15.10.04.

В задачах этого листка можно пользоваться без доказательства *только* результатами, уже доказанными на лекциях.

8. Сходится ли ряд (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$; (d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

9. Для каких $z \in \mathbb{R}$ (* $z \in \mathbb{C}$) сходится ряд
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!z^n$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, где $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$, $|z| \neq c$.

10. (a) Представьте многочлен x^3+3x^2-2x-1 в виде многочлена от переменной $y = x+1$.
(b) Найдите такие числа a_n, чтобы для любого z с $|z| < 1$ получилось $\frac{1}{x^2+2x+2} = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ (указание: разложите $\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)^2+1}$ по степеням $x+1$ и переразложите по степеням x).

11.* $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ для $|z| < 1$.

Из Голубой Книги: 5, 8, 9*, 11, 14, 16*.

НМУ, 1 курс, анализ. Листок 4. Ряды с произвольными членами. 15.10.04.

В задачах этого листка можно пользоваться без доказательства *только* результатами, уже доказанными на лекциях.

8. Сходится ли ряд (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$; (d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

9. Для каких $z \in \mathbb{R}$ (* $z \in \mathbb{C}$) сходится ряд
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!z^n$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, где $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$, $|z| \neq c$.

10. (a) Представьте многочлен x^3+3x^2-2x-1 в виде многочлена от переменной $y = x+1$.
(b) Найдите такие числа a_n, чтобы для любого z с $|z| < 1$ получилось $\frac{1}{x^2+2x+2} = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ (указание: разложите $\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)^2+1}$ по степеням $x+1$ и переразложите по степеням x).

11.* $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ для $|z| < 1$.

Из Голубой Книги: 5, 8, 9*, 11, 14, 16*.

НМУ, 1 курс, анализ. Листок 4. Ряды с произвольными членами. 15.10.04.

В задачах этого листка можно пользоваться без доказательства *только* результатами, уже доказанными на лекциях.

8. Сходится ли ряд (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$; (d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

9. Для каких $z \in \mathbb{R}$ (* $z \in \mathbb{C}$) сходится ряд
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!z^n$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, где $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$, $|z| \neq c$.

10. (a) Представьте многочлен x^3+3x^2-2x-1 в виде многочлена от переменной $y = x+1$.
(b) Найдите такие числа a_n, чтобы для любого z с $|z| < 1$ получилось $\frac{1}{x^2+2x+2} = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ (указание: разложите $\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)^2+1}$ по степеням $x+1$ и переразложите по степеням x).

11.* $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ для $|z| < 1$.

Из Голубой Книги: 5, 8, 9*, 11, 14, 16*.

НМУ, 1 курс, анализ. Листок 5. Формула Тейлора и ряд Тейлора. 22-29.10.04.

Из Голубой Книги: 18, 19*, 21, 25*, 26, 28, 29*, 30*.

В задачах этого листка можно пользоваться без доказательства *только* производные элементарных функций, достаточное условие монотонности и теорему Коши.

1. Дана функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (a) Если f дифференцируема в нуле и $f(0) = f'(0) = 0$, то $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$.

(b) Если f дважды непрерывно дифференцируема в нуле (т.е. f'' существует в окрестности нуля и непрерывна в нуле) и $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, то $f(x)$ есть $o(x^2)$ при $x \to 0$.

(c) Если f n-кратно непрерывно дифференцируема в нуле и $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$, то $f(x)$ есть $o(x^n)$ при $x \to 0$.

(d) *Формула МакЛорена.* Если f n-кратно непрерывно дифференцируема в нуле, то $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + \cdots + f^{(n)}(0)x^n/n! + o(x^n)$ при $x \to 0$.

(e)* *Формула Тейлора.* Если функция f n раз непрерывно дифференцируема в точке a, то $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n)$ при $x \to a$.

2.* (a) Если $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$, то $f^{(n)}(0) = 0$ и $f(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$.

(b) Для любой последовательности $\{a_n\}$ существует такая бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, что $f^{(n)}(x) = a_n$ для любого n.

3. (a) $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ для $x < 0$. (b)* Вычислите $\sin 1$ с точностью до $0,01$.

4. Пусть $x \in (0, 1]$ (кроме пункта e).

(a) $\frac{e^x - 1}{x} = e^{x_1}$ для некоторого $x_1 \in (0, x)$; (b) $1 + x < e^x < 1 + ex$;

(c) $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{e^{x_2}}{2}$ для некоторого $x_2 \in (0, x)$; (d) $1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x < 1 + x + \frac{ex^2}{2}$;

(e)* $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ для любого вещественного x.

5. Разложите в ряд функцию (a) $\sqrt{1+x}$; (b) $\ln x$; (c) $\frac{1}{1-x}$; (d)* $\ln(1+x)$.

6. (a) Найдите $(\frac{1}{x^2+1})^{(n)}$. (b) Найдите $(\operatorname{arctg} x)^{(n)}$.

(c)* Ряд Маклорена функции $\operatorname{arctg} x$ сходится к $\operatorname{arctg} x$ для $x \in (-1, 1)$.

7. Найдите все такие непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(1) = a$ и для любых x, y

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; (b) $f(x+y) = f(x)f(y)$; (c)* $f(xy) = f(x) + f(y)$;

НМУ, 1 курс, анализ. Листок 6. Полнота и компактность. 5.11.04.

Из Голубой Книги: 31, 32, 34, 35, 37, 38*, ???