Полнота и компактность (семинар 05.11.2004)

1. Пусть пространство M вполне ограничено. Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим минимальную (по числу точек) ε-сеть в этом пространстве. Пусть $N(\varepsilon)$-число элементов в этой сети. Рассмотрим отношение

$$\log N(\varepsilon) / \log(1/\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to 0$. (а) Найдите предел этого отношения для отрезка. (б) Найдите предел этого отношения для квадрата на плоскости. (в) Приведите пример метрического пространства, для которого это отношение имеет дробный предел (скажем, 1,5). (г) Приведите пример (вполне ограниченного) метрического пространства, для которого это отношение имеет бесконечный предел.

2. Рассмотрим единичный шар в пространстве $C[0, 1]$ (непрерывные функции на отрезке с метрикой равномерной сходимости). Будет ли это пространство полным? вполне ограниченным? компактным? Тот же вопрос, если рассмотреть множество всех многочленов степени не более N, попадающих в этот шар.

3. Покажите, что в любом вполне ограниченном пространстве имеется счётное всюду плотное множество (последнее означает, что его замыкание совпадает со всем пространством).

4. (а) Пусть X — компактное подмножество метрического пространства M, а точка a лежит в его дополнении. Докажите, что в X существует ближайшая к a точка. (б) Покажите, что в компактном метрическом пространстве существует пара наиболее удалённых друг от друга точек.

5. Пусть $f \to X \to \mathbb{R}$ — функция, определённая на метрическом пространстве X. Назовём колебанием функции на множестве $U \subset X$ точную верхнюю грань $|f(u_1) - f(u_2)|$ по всех $u_1, u_2 \in U$. Колебанием f в точке назовём точную нижнюю грань колебаний во всех шарах с центрами в этой точке. (а) Докажите, что функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда колебание в этой точке равно нулю. (б) Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ множество тех точек x, в которых колебание не меньше ε, является замкнутым. (в) Докажите, что множество точек разрыва функции f является счётным объединением замкнутых множеств. (г) Покажите, что на прямой множество иррациональных чисел не может быть представлено в виде счётного объединения замкнутых множеств. (д) Может ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ быть непрерывной во всех иррациональных точках и разрывной во всех рациональных? А наоборот?

6. (Лемма Лебега) Покажите, что для любого открытого покрытия компактного пространства существует такое $\varepsilon > 0$, что любой шар радиуса ε целиком содержится в одном из множеств покрытия. (Указание: как ни странно, не надо сразу выбирать конечное подпокрытие. Лучше воспользоваться определением с предельными точками.)

7. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства X на метрическое пространство Y. Покажите, что f — гомеоморфизм (обратное отображение непрерывно).

8. (а) Приведите пример неполного метрического пространства, гомеоморфного полному. (б) Покажите, что $\mathbb{Q}$ не гомеоморфно никакому полному метрическому пространству.

9. Докажите, что компактное метрическое пространство M нельзя изометрично отобразить на его часть (не совпадающую с M)